Digitized by Google

BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS
Ch. Wink. del.
Sichlerf. sc. 1779.

<36700081600019

<36700081600019

Bayer. Staatsbibliothek

Math. a. 237-2

BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Digitized by Google

Math. a. 237-2

Digitized by Google

# Einleitung
## zur
# Berechnung der Leibrenten
## und
# Anwartſchaften

*Zweyter Theil.*

Verſuche
über einige bey Verſorgungs-Anſtalten
erhebliche Puncte

von

Joh. Nicol. Tetens
Profeſſor der Philoſophie und Mathematik zu Kiel.

STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Leipzig
bey Weidmanns Erben und Reich.
1786.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

# Vorbericht.

Die Einleitung zur Rentenrechnung enthält die Methoden, wornach bey Verſorgungsanſtalten gerechnet werden muſs, wenn man dieſe ſo zuverläſsig machen will, als es ihrer Natur nach angeht. Sogar in ſolchen Fällen, wo die Laſt unter die Intereſſenten nach einem andern Grundſatz vertheilet werden ſoll, als nach dem bey freyen Geſellſchaften, daſs jeder ſeine eigene trage, hat man doch vorher die wahren Rentenwerthe nach den nämlichen Methoden zu berechnen. Dieſs zeigt, was die Caſſe haben müſſe, und dann kann erſt die Vertheilung auf die beliebte Art gemacht werden. So etwas kommt z. B. bey *collegialiſchen Wittwencaſſen* vor, wo auf das Alter der Perſonen beym Eintritt nicht geſehen, und Einſätze und Beyträge nach dem Verhältniſs der Beſoldungen beſtimmet werden ſollen.



Digitized by Google

Dennoch ist die Berechnung der Renten nicht alles, was ein durchgedachter Plan erfordert. Es kommt noch verschiedenes mehr dabey in Betracht, vor allem *das Risico der Casse*, was bey solchen Instituten in jedem Fall Statt findet. Das alles zusammen genommen, worauf, zumal bey allgemeinen Versorgungsanstalten, zu sehen ist, würde Stoff geben zu einem eignen zweyten Theil der *Wissenschaft von Versorgungsanstalten*, wozu die Rentenrechnung nur den ersten ausmacht. Dergleichen hier zu liefern ist meine Absicht nicht. Ich habe blos einige dahin gehörige Puncte zu erörtern gesucht, die mir die erheblichsten und schwierigsten schienen, und bisher wenig, die meisten, so viel ich weiss, gar nicht, untersucht sind.

---

Abhand-

Digitized by Google

# Abhandlungen.

1) *Von der Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften* Seite 1

2) *Vom Verhältniss der Wittwenzahl zu der Zahl der stehenden Ehen* 94

3) *Ueber das Rifico der Casse bey Versorgungsanstalten* 109

4) *Ueber die Zuverläfsigkeit der gefundenen mittlern Gröfsen* 173

5) *Ueber die Aufgabe: Wie der Ueberschufs oder Mangel bey einer Wittwencasse den Interessenten zu berechnen sey?* 186

6) *Von*

Digitized by Google

6) *Von Wittwenrenten, die von gewiſſen Bedingungen abhangen* Seite 249

*Zuſatz zur dritten und vierten Abhandlung. Von der Wahrſcheinlichkeit der gröſsten Erwartung* Seite 286

Erſte

# Erſte Abhandlung.

## *Von der Sterblichkeit in ausgeſuchten Geſellſchaften.*

### Erſter Abſchnitt.

### *Erfahrungen, die hieher gehören.*

#### I.

Unter den Erfahrungen, woraus ſich die Abweichung der Sterblichkeit in *ausgeſuchten* Geſellſchaften von der *tabellariſchen*, oder der im gemeinen Leben, erkennen läſst, ſetze ich die aus der 1767 errichteten *Calenbergiſchen Wittwenverpflegungs-Geſellſchaft* voran. Die mir gütigſt mitgetheilten ausführlichen Tabellen muſsten des Raums wegen etwas zuſammengezogen werden. Das iſt geſchehen, ohne ſie zu verſtümmeln, und ohne ſie weniger brauchbar zu machen für den, der ſie etwan aus einem andern Geſichtspunct betrachten wollte.

#### 2.

Vorläufig iſt zu bemerken:

1) Die Calenbergiſche Geſellſchaft war in Hinſicht der *Ehemänner* eine *ausgeſuchte Geſellſchaft*. Dieſe muſsten ihre Geſundheit beym Eintritt beſcheinigen.

Jedoch weiſs man recht gut, daſs viele ſolcher Zeugniſſe, zumal in dem erſten Receptions-Termin, unzuverläſſig geweſen ſind. Alles drang ſich mit Gewalt zu wegen der groſsen Vortheile, die man hoffen lieſs. Daher auch die Sterblichkeit der Anfangs aufgenommenen 1270 Ehemänner nicht ſo viel geringer geweſen iſt, als ſie ſonſt hätte ſeyn können. Und nur von dieſer ihrem Abſterben habe ich das Verzeichniſs vor mir, das noch dazu mangelhaft iſt, wie ich nachher bemerken will. Aber auch ſo wie es iſt, hätte ich gewünſcht es von den in den folgenden Terminen Eingetretenen auch zu haben.

Die *Ehefrauen* brauchten ihre Geſundheit nicht zu beſcheinigen. Es ſind auch viele einzelne Beyſpiele bekannt, wo Männer einſetzten, ohnerachtet ihre Frauen ſchwächlich waren, und wahrſcheinlich zuerſt ſterben würden, zumal in den erſten Terminen. Indeſſen können ſie doch mit noch gröſſerer Sicherheit für *Anfangs geſunde* Perſonen angenommen werden, als die Männer. Denn ſo viel muſste doch ein Mann von der Geſundheit ſeiner Frau wohl wiſſen, als er ſelbſt von der ſeinigen zu bezeugen hatte, daſs ſie nämlich keine Krankheit habe, die ein baldiges Abſterben mit Wahrſcheinlichkeit vermuthen laſſe. Es zeigen es auch die folgenden Tabellen, daſs die in den erſten Terminen aufgenommenen Frauen nicht häufiger abgeſtorben ſind, als die in den folgenden zugekommen ſind.

*Ausge-*

*Ausgesucht* war übrigens diese Gesellschaft nur in Hinsicht der *dermaligen Gesundheit* der Mitglieder beym Eintritt in die Gesellschaft, nicht in Hinsicht *der körperlichen Constitution*, der Stärke und Festigkeit. Gesellschaften, worinn nur lauter *gesunde und starke* Personen eintreten, müssen natürlich eine noch geringere Sterblichkeit zeigen.

3.

2) Von *Frauen*, die anfangs Aufgenommen, nachher aber von der Gesellschaft getrennet wurden, hat man keine Nachricht, wenn sie gestorben sind. Einige davon giengen gleich im ersten Jahre ab, weil der Mann das Probejahr nicht überlebte. Diese können angesehen werden als solche, die gar nicht zu der Gesellschaft gehöret haben, zumal da ihre Zahl im Ganzen nicht erheblich ist. Allein die übrigen, die von ihren Männern geschiedenen, die ausgeschlossenen, die wiederverheyratheten, welche vor ihrer Absonderung einige Jahre bey der Gesellschaft gelebet hatten, müssen mit in Betracht gezogen werden. Es ist ein ganz anders, ob einige nie eingetreten, oder ob sie eingetreten, und nach einigen Jahren wiederum ausgetreten sind? Im letzten Fall haben sie diese Zeit durchlebet, ohne ihren Beytrag zur Todtenliste zu geben, das ist, es ist in der Zeit keine aus ihnen gestorben, was doch nach den Tabellen hätte geschehen sollen. Da in den von mir gebrauchten Verzeichnissen weder ihr Alter beym Eintritt, noch das Jahr bemerket

war, wenn sie von der Gesellschaft getrennt worden sind, so habe ich in Hinsicht ihrer mir durch Hypothesen helfen müssen. Es ist angenommen:

a) In Hinsicht *ihres Alters beym Eintritt*, dass solches eben so verschieden gewesen sey, wie bey den übrigen zugleich Eingetretenen. Sie sind also verhältnissmässig durch die Classen von diesen vertheilet. Die Zahl der aus ihnen *erwarteten* Todten ist also in demselben Verhältniss zu ihrer anfänglichen Zahl wie bey den übrigen.

b) Um zu finden, wie viel als *wirkliche Todte* für sie in Rechnung zu bringen sey, ist angenommen, dass sie im Durchschnitt die Hälfte der ganzen Zeit bey der Gesellschaft lebend geblieben, dann aber von diesem Alter an, nach den Tabellen abgestorben sind. Eine grösere Sterblichkeit, als die gemeine, kann man ihnen nicht beylegen. Diese konnte bey ihnen vielmehr auch in der Folge noch geringer seyn, als die tabellarische. Ein wenig ist auch darauf gesehen worden, wo z. B. die Zeit des Abgangs $15\frac{1}{2}$ Jahre ist, sind 8 Jahre für ihr Bleiben bey der Gesellschaft, und $7\frac{1}{2}$ Jahr der Trennung gerechnet. Im Ganzen macht dieſs keinen erheblichen Unterschied, zumal bey den *Frauen*. Ueberdiess ist zur kürzern Berechnung der wircklichen Todten das anfängliche Alter dieser Frauen für gleich und so gross genommen, als das Durchschnitts-Alter der übrigen Recipirten.

3) Diese Correction hätte bey den *Frauen* allenfalls ganz wegbleiben können. Allein bey den Männern wird

sie

Digitized by Google

sie wichtig und unentbehrlich. Es waren 1270 in allen im ersten Termin eingetreten. Davon sind in 16 Jahren 237 theils durch das Absterben der Frauen, theils weil sie ausgeschlossen worden, von der Gesellschaft getrennt, ohne dafs bemerket ist, wenn und in welchem Alter? Bey diesen mufste nach den vorher angezeigten beyden Voraussetzungen genauer gesucht werden, sowohl wie viel man *wirkliche* Todten, als auch wie viel nach den Tabellen zu *erwartende*, auf sie zu rechnen habe?

## 4.

4) Die Personen, die in Hinsicht des Alters zu einem und demselben Jahr-Fünft gehören, sind in den nachstehenden Tabellen zusammengenommen worden. Dafür ist das *Durchschnitts-Alter* derselben gebraucht. Aber die Zahl der *erwarteten* Todten ist nicht für alle nach dem Durchschnitts-Alter, sondern für jeden besondern Haufen nach seinem besondern Alter berechnet worden. So glaube ich diesen abgekürzeten Tabellen eben die mannichfaltige und vielseitige Brauchbarkeit gelassen zu haben, welche die ausführlichen haben, die sonst sogleich vermindert wird, sobald man statt der reinen Erfahrungen Resultate aus ihnen vorleget.

Noch ist zu erinnern, dafs, da in dem Verzeichnisse, das ich genutzet habe, das Alter der Personen nur nach den vollen zurückgelegten Jahren bestimmet war, so mufste sowohl bey der Berechnung des Durchschnitt-



Digitized by Google

Alters als der Todten jede ein halbes Jahr älter angenommen werden. Auch sind die erwarteten Todten nach Süssmilchs Sterblichkeits-Tafel berechnet. (Taf. IV.)

5.

5) Die *erste* Tabelle enthält die 1767 im Junius recipirten Personen, die am Schluss des Jahrs 1783 in Gesellschaft gewesen sind. Die zwote enthält die das folgende halbe Jahr Eingetretenen, welche 15 Jahre zusammen gewesen sind. Es enthält also jede Tabelle die Sterblichkeit einer besondern Gesellschaft. Eigentlich stellen also diese Tabellen nicht die nach und nach von halben Jahr zu halben Jahre vorgefundene Sterblichkeit einer und derselben anfänglich zusammengetretenen Gesellschaft vor. Wenn die Anfangs zusammengekommene Gesellschaft von 1270 für sich allein genommen, und das Absterben daraus von halben Jahren zu halben Jahren angegeben wäre, so würde man das Schicksal einer und derselben Gesellschaft haben. Sicher würde eine solche Tabelle lehrreich seyn. Vielleicht ist künftig Gelegenheit sie zu erhalten. Inzwischen ist man doch auch berechtiget, zumal jetzo noch, da an die gröfste Praecision nicht zu denken ist, die obigen Tabellen zu gebrauchen, als wenn sie zu Einer Gesellschaft gehörten. Man kann nämlich annehmen, dafs in demselben Verhältnisse, worinn die Todten nach 2 Jahren stehen in der Gesellschaft N. 28., sie auch in der Gesellschaft der anfänglichen 1270 (N. 1.) nach 2 Jahren gestanden haben, u. s. f.

6. *Zuerst*

## 6.

### *Zuerst die Erfahrungen bey den Frauen.*

1. *Abweichung nach 15½ Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 14 | 4 | 2, 289 |
| 23 | 61 | 15 | 10, 953 |
| 27½ | 185 | 27 | 41, 222 |
| 32½ | 226 | 38 | 57, 797 |
| 37½ | 243 | 52 | 73, 354 |
| 42½ | 216 | 47 | 77, 978 |
| 47 | 127 | 36 | 54, 351 |
| 52 | 104 | 36 | 54, 013 |
| 57 | 49 | 24 | 30, 586 |
| 62½ | 20 | 12 | 14, 872 |
| 67½ | 7 | 7 | 5, 870 |
| 70½ | 1 | 0 | 0, 872 |
| 39½ | 1253 | 298 | 424, 157 |
| Noch von | 17 | 3 (*) | 6, 55 |
| | 1270 | 301 | 430, 707 |

2. *Abweichung nach 15 Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18 | 6 | 1 | 0, 939 |
| 23½ | 14 | 2 | 2, 620 |
| 28 | 34 | 8 | 7, 276 |
| 32½ | 43 | 10 | 10, 567 |
| 37½ | 28 | 4 | 8, 101 |
| 42½ | 29 | 5 | 9, 226 |
| 47½ | 25 | 7 | 10, 324 |
| 52½ | 8 | 3 | 4, 104 |
| 58 | 2 | 0 | 1, 252 |
| 36 | 189 | 40 | 54, 409 |
| Noch von | 7 | 1 (*) | 2 |
| | 196 | 41 | 56, 41 |

(*) Hier sind blos die ganzen Zahlen genommen. In den folgenden sind auch ein paar Decimalziffern hinzugesetzt.

3. *Abweichung nach 14½ Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl.- | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 17½ | 3 | 0 | 0, 442 |
| 23 | 11 | 2 | 1, 962 |
| 27½ | 29 | 6 | 5, 972 |
| 32½ | 24 | 4 | 5, 620 |
| 37½ | 20 | 5 | 5, 645 |
| 43 | 21 | 3 | 7, 059 |
| 47½ | 11 | 1 | 4, 774 |
| 52 | 9 | 4 | 4, 245 |
| 57 | 5 | 4 | 2, 866 |
| 37½ | 133 | 29 | 38, 585 |
| Noch von | 4 | 0, 67 | 1, 16 |
| | 137 | 29, 67 | 39, 745 |

4. *Abweichung nach 14 Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 19 | 3 | 1 | 0, 447 |
| 22½ | 18 | 3 | 3, 039 |
| 27 | 23 | 3 | 4, 482 |
| 32½ | 25 | 7 | 5, 739 |
| 36½ | 18 | 4 | 4, 756 |
| 42½ | 18 | 4 | 5, 727 |
| 47½ | 12 | 1 | 4, 646 |
| 54½ | 1 | 1 | 0, 511 |
| 56 | 2 | 0 | 1, 088 |
| 34 | 120 | 24 | 30, 435 |
| Noch von | 3 | 0, 76 | 0, 76 |
| | 123 | 24, 76 | 31, 195 |

5. *Ab-*

Digitized by Google

5. *Abweichung nach 13½ Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 8 | 0 | 1, 131 |
| 22½ | 14 | 3 | 2, 279 |
| 27½ | 29 | 9 | 5, 495 |
| 33 | 25 | 2 | 5, 580 |
| 37½ | 34 | 4 | 8, 487 |
| 42 | 13 | 2 | 3, 987 |
| 47½ | 8 | 3 | 2, 993 |
| 52½ | 6 | 1 | 2, 757 |
| 57½ | 4 | 2 | 2, 207 |
| 33 | 141 | 26 | 34, 916 |
| von | 5 | 0, 6 | 1, 312 |
| | 146 | 26, 6 | 36, 228 |

6. *Abweichung nach 13 Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 10 | 2 | 1, 344 |
| 22½ | 23 | 3 | 3, 614 |
| 27½ | 21 | 4 | 5, 500 |
| 32½ | 30 | 5 | 6, 330 |
| 38½ | 17 | 2 | 4, 250 |
| 42½ | 21 | 5 | 6, 158 |
| 47½ | 13 | 3 | 4, 617 |
| 51½ | 4 | 1 | 1, 724 |
| 58½ | 1 | 0 | 0, 539 |
| 33½ | 140 | 25 | 34, 076 |
| von | 7 | 0, 86 | 50 |
| | 147 | 25, 86 | 34, 576 |

### 7. *Abweichung nach 12½ Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 7 | 1 | 0, 908 |
| 23 | 30 | 2 | 4 498 |
| 27 | 41 | 4 | 7, 088 |
| 32½ | 58 | 10 | 11, 564 |
| 37½ | 43 | 4 | 10, 161 |
| 42½ | 24 | 3 | 6, 831 |
| 47 | 26 | 3 | 8, 879 |
| 52 | 6 | 3 | 2, 433 |
| 55½ | 1 | 0 | 0, 473 |
| 33½ | 236 | 30 | 52, 835 |
| von | 6 *Excludirten.* | 0, 67 | 1, 342 |
| | 242 | 30, 67 | 54, 177 |

### 8. *Abweichung nach 12 Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 19 | 7 | 0 | 0, 893 |
| 23 | 24 | 4 | 0 427 |
| 28 | 35 | 5 | 5, 951 |
| 32½ | 36 | 6 | 6. 945 |
| 37½ | 39 | 8 | 8. 697 |
| 42 | 27 | 7 | 7, 384 |
| 47½ | 10 | 0 | 3, 354 |
| 52 | 4 | 0 | 1, 516 |
| 56½ | 1 | 1 | 0 474 |
| 63½ | 1 | 1 | 0. 629 |
| 34 | 184 | 32 | 36, 270 |
| noch | 6 | 0, 67 | 1, 18 |
| | 190 | 32, 67 | 37, 45 |

9. *Ab-*

Digitized by Google

9. *Abweichung nach 11½ Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 9 | 2 | 1, 051 |
| 22½ | 15 | 4 | 1, 982 |
| 27½ | 51 | 5 | 8, 195 |
| 32½ | 36 | 9 | 6, 670 |
| 38 | 36 | 5 | 7, 788 |
| 42 | 25 | 2 | 6, 307 |
| 47 | 12 | 1 | 3, 701 |
| 52 | 7 | 1 | 2, 627 |
| 57½ | 2 | 1 | 0, 953 |
| 63½ | 1 | 0 | 0, 608 |
| 34 | 194 | 30 | 39, 882 |
| von | 6 | 0, 6 | 1, 75 |
| | 200 | 30, 6 | 41, 632 |

10. *Abweichung nach 11 Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 19 | 7 | 2 | 0, 790 |
| 22½ | 29 | 2 | 3, 675 |
| 27 | 40 | 3 | 6, 010 |
| 32½ | 40 | 8 | 7, 068 |
| 37 | 31 | 3 | 6, 235 |
| 41½ | 14 | 2 | 3, 375 |
| 48 | 10 | 2 | 3, 056 |
| 51½ | 2 | 0 | 0, 699 |
| 55½ | 2 | 0 | 0, 826 |
| 60½ | 1 | 0 | 0, 520 |
| 32½ | 176 | 23 | 32, 254 |
| von | 8 | 0, 8 | 1, 47 |
| | 184 | 23, 8 | 33, 724 |

11. *Ab-*

11. *Abweichung nach 10½ Jahren.*

| Durchſchn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 5 | 0 | 0, 536 |
| 23 | 21 | 2 | 2, 566 |
| 28 | 45 | 2 | 6, 390 |
| 32½ | 46 | 8 | 7, 819 |
| 37½ | 46 | 8 | 8, 838 |
| 42½ | 18 | 2 | 4, 211 |
| 47½ | 9 | 1 | 2, 621 |
| 52 | 4 | 2 | 1, 347 |
| 33½ | 194 | 25 | 34, 379 |
| von | 7 | 0, 6 | 1, 236 |
| | 201 | 25, 6 | 35, 615 |

12. *Abweichung nach 10 Jahren.*

| Durchſchn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18 | 4 | 0 | 0, 390 |
| 22½ | 32 | 0 | 3, 641 |
| 27½ | 36 | 5 | 3, 924 |
| 32½ | 37 | 9 | 5, 846 |
| 37½ | 21 | 2 | 3, 846 |
| 41½ | 14 | 2 | 2, 778 |
| 46½ | 11 | 1 | 2, 905 |
| 52 | 5 | 1 | 1, 605 |
| 56½ | 1 | 1 | 0 392 |
| 32 | 161 | 21 | 25, 328 |
| von | 4 | 0, 35 | 0, 629 |
| | 165 | 21, 35 | 26, 057 |

13. *Ab-*

Digitized by Google

13. *Abweichung nach 9½ Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18 | 7 | 1 | 0, 645 |
| 22½ | 31 | 4 | 3, 339 |
| 28 | 35 | 6 | 4, 559 |
| 32½ | 34 | 7 | 5, 119 |
| 37½ | 31 | 6 | 5, 305 |
| 41½ | 14 | 1 | 2, 835 |
| 47 | 8 | 1 | 2, 019 |
| 52½ | 5 | 2 | 1, 342 |
| 32 | 165 | 26 | 25, 163 |
| von | 1 | 0, 035 | 0, 152 |
| | 166 | 26, 035 | 25, 315 |

14. *Abweichung nach 9 Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 17½ | 8 | 0 | 0, 714 |
| 22½ | 24 | 2 | 2. 442 |
| 28 | 26 | 6 | 3, 167 |
| 32½ | 33 | 2 | 4. 697 |
| 38 | 24 | 0 | 4, 024 |
| 42½ | 16 | 0 | 3, 088 |
| 46½ | 7 | 1 | 1, 664 |
| 50½ | 2 | 0 | 0, 548 |
| 60½ | 1 | 0 | 0, 431 |
| 32½ | 141 | 11 | 20, 775 |
| von | 3 | 0, 24 | 0, 443 |
| | 144 | 11, 24 | 21, 218 |

15. *Ab-*

Digitized by Google

15. *Abweichung nach 8½ Jahren.*

| Durchſchn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 11 | 0 | 0, 899 |
| 23 | 28 | 2 | 2, 669 |
| 28 | 39 | 5 | 4, 478 |
| 32½ | 25 | 4 | 3, 348 |
| 37½ | 21 | 1 | 3, 190 |
| 42½ | 11 | 0 | 1, 903 |
| 48 | 7 | 1 | 1, 645 |
| 52½ | 3 | 1 | 0, 819 |
| 31 | 145 | 14 | 18, 951 |
| von | 3 | 0, 21 | 0. 393 |
| | 148 | 14, 21 | 19, 344 |

16. *Abweichung nach 8 Jahren.*

| Durchſchn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 5 | 0 | 0, 382 |
| 23½ | 18 | 1 | 1, 638 |
| 27½ | 31 | 6 | 3, 279 |
| 32 | 30 | 2 | 3, 709 |
| 37 | 17 | 1 | 2, 704 |
| 42 | 15 | 0 | 2, 515 |
| 48½ | 7 | 0 | 1, 543 |
| 51½ | 1 | 0 | 0, 251 |
| 58½ | 1 | 0 | 0, 324 |
| 32½ | 125 | 10 | 16, 345 |
| von | 1 | 0, 07 | 0, 131 |
| | 126 | 10, 07 | 16, 476 |

17. *Ab-*

Digitized by Google

17. *Abweichung nach 7½ Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 7 | 0 | 0, 502 |
| 23 | 23 | 4 | 1, 908 |
| 28 | 41 | 4 | 4, 056 |
| 32 | 47 | 2 | 5, 661 |
| 37½ | 16 | 4 | 3, 140 |
| 42½ | 8 | 2 | 1, 267 |
| 47 | 8 | 0 | 1, 580 |
| 52 | 3 | 1 | 0, 698 |
| 31 | 153 | 17 | 18, 812 |
| von | 3 | 0, 18 | 0, 369 |
| | 156 | 17, 18 | 19, 181 |

18. *Abweichung nach 7 Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 13 | 1 | 0, 868 |
| 22½ | 33 | 1 | 2, 528 |
| 27 | 34 | 0 | 3, 048 |
| 32 | 35 | 1 | 3, 726 |
| 37 | 17 | 3 | 2, 087 |
| 42½ | 16 | 1 | 2, 368 |
| 46½ | 8 | 0 | 1, 437 |
| 51½ | 3 | 0 | 0, 659 |
| 30½ | 159 | 7 | 16, 721 |
| von | 2 | 0, 114 | 0, 235 |
| | 161 | 7, 114 | 16, 956 |

19. *Ab-*

Digitized by Google

19. *Abweichung nach 6½ Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 7 | 0 | 0, 438 |
| 22 | 12 | 1 | 0, 833 |
| 27½ | 29 | 3 | 2, 434 |
| 32 | 30 | 2 | 3, 008 |
| 37 | 14 | 1 | 1, 610 |
| 42½ | 9 | 0 | 1, 225 |
| 47½ | 6 | 0 | 1, 054 |
| 51½ | 1 | 0 | 0, 204 |
| 31 | 108 | 7 | 10, 806 |
| von | 4 | 0, 19 | 0, 400 |
| | 112 | 7, 19 | 11, 206 |

20. *Abweichung nach 6 Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 19 | 7 | 0 | 0, 404 |
| 23 | 13 | 0 | 0, 846 |
| 27½ | 28 | 1 | 2, 167 |
| 32½ | 34 | 4 | 3, 162 |
| 37½ | 15 | 0 | 1, 605 |
| 42½ | 18 | 1 | 2, 256 |
| 48 | 3 | 0 | 0, 489 |
| 51½ | 3 | 0 | 0, 188 |
| 31½ | 121 | 6 | 11, 117 |
| von | 3 | 0, 15 | 0, 276 |
| | 124 | 6, 15 | 11, 393 |

21. *Ab-*

Digitized by Google

21. *Abweichung nach 5½ Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangszahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 5 | 0 | 0, 258 |
| 22½ | 18 | 1 | 1, 040 |
| 27½ | 34 | 0 | 2, 389 |
| 32½ | 22 | 3 | 1, 847 |
| 37½ | 25 | 1 | 2, 444 |
| 42½ | 8 | 2 | 0, 896 |
| 46½ | 1 | 0 | 0, 140 |
| 50½ | 2 | 0 | 0, 334 |
| 31 | 115 | 7 | 9, 348 |
| von | 2 | 0, 08 | 0, 162 |
| | 117 | 7, 08 | 9, 510 |

22. *Abweichung nach 5 Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangszahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 19 | 6 | 0 | 0, 287 |
| 22½ | 20 | 3 | 1, 049 |
| 27 | 30 | 0 | 1, 883 |
| 32½ | 24 | 1 | 1, 836 |
| 37½ | 25 | 1 | 2, 222 |
| 42 | 11 | 0 | 1, 098 |
| 48½ | 8 | 0 | 1, 107 |
| 53 | 3 | 0 | 0, 497 |
| 32½ | 127 | 5 | 9, 979 |
| von | 1 | 0, 04 | 0, 078 |
| | 128 | 5, 04 | 10, 057 |



Digitized by Google

23. *Abweichung nach* $4\frac{1}{2}$ *Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| $19\frac{1}{2}$ | 2 | 0 | 0, 088 |
| $22\frac{1}{2}$ | 17 | 1 | 0, 798 |
| $27\frac{1}{2}$ | 33 | 0 | 2. 429 |
| $32\frac{1}{2}$ | 30 | 1 | 2, 019 |
| $37\frac{1}{2}$ | 28 | 0 | 2, 224 |
| $42\frac{1}{2}$ | 8 | 0 | 0, 722 |
| 47 | 5 | 0 | 0, 574 |
| $31\frac{1}{2}$ | 123 | 2 | 8, 854 |
| von | 1 | 0,03 | 0, 072 |
| | 124 | 2,03 | 8, 926 |

24. *Abweichung nach 4 Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| $17\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 0, 035 |
| $22\frac{1}{2}$ | 18 | 1 | 0, 754 |
| 27 | 27 | 2 | 1, 357 |
| $32\frac{1}{2}$ | 19 | 1 | 1, 149 |
| $37\frac{1}{2}$ | 17 | 1 | 1, 193 |
| 43 | 8 | 1 | 0, 646 |
| 48 | 7 | 0 | 0, 741 |
| $51\frac{1}{2}$ | 2 | 1 | 0, 252 |
| $32\frac{1}{2}$ | 99 | 7 | 6, 127 |
| von | 1 | 0, 03 | 0, 067 |
| | 100 | 7, 03 | 6, 194 |

25. *Ab-*

Digitized by Google

25. *Abweichung nach 3½ Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 19½ | 3 | 0 | 0, 102 |
| 22½ | 22 | 0 | 0, 786 |
| 27½ | 25 | 0 | 1, 088 |
| 32½ | 17 | 0 | 0, 878 |
| 37 | 19 | 1 | 1, 173 |
| 42½ | 11 | 0 | 0, 778 |
| 48 | 8 | 0 | 0, 741 |
| 50½ | 2 | 0 | 0, 214 |
| 55½ | 1 | 0 | 0, 126 |
| 32½ | 108 | 1 | 5, 886 |

26. *Abweichung nach 3 Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18½ | 7 | 0 | 0, 191 |
| 22½ | 22 | 0 | 0, 703 |
| 27½ | 28 | 0 | 1, 060 |
| 32½ | 26 | 1 | 1, 151 |
| 37½ | 26 | 2 | 1, 377 |
| 42½ | 14 | 0 | 0, 842 |
| 46 | 4 | 0 | 0, 286 |
| 50½ | 1 | 0 | 0, 090 |
| 32½ | 128 | 3 | 5, 700 |
| von | 1 | 0, 02 | 045 |
| | 129 | 3, 02 | 5, 745 |

27. *Abweichung nach 2½ Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 18 | 8 | 0 | 0, 176 |
| 23 | 18 | 0 | 0, 468 |
| 27½ | 28 | 2 | 0, 853 |
| 32½ | 13 | 0 | 0, 528 |
| 37½ | 9 | 0 | 0, 398 |
| 42 | 3 | 0 | 0, 148 |
| 47½ | 5 | 0 | 0, 295 |
| 52½ | 1 | 0 | 0, 080 |
| 29 | 85 | 2 | 2, 946 |

28. *Abweichung nach 2 Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 19 | 4 | 1 | 0, 074 |
| 22½ | 16 | 1 | 0, 333 |
| 27½ | 10 | 0 | 0, 307 |
| 32½ | 12 | 0 | 0, 344 |
| 38 | 7 | 0 | 0, 250 |
| 41½ | 0 | 0 | 0, 382 |
| 51½ | 2 | 0 | 0, 126 |
| 31 | 61 | 2 | 1, 816 |

29. *Ab-*

Digitized by Google

29. *Abweichung nach 1½ Jahren.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 19 | 2 | 0 | 0, 026 |
| 23 | 7 | 0 | 0, 110 |
| 27½ | 7 | 0 | 0, 124 |
| 30½ | 3 | 0 | 0, 063 |
| 37½ | 6 | 0 | 0, 157 |
| 43½ | 1 | 0 | 0, 030 |
| 45½ | 1 | 0 | 0, 030 |
| 29½ | 27 | 0 | 0, 540 |

30. *Abweichung nach 1 Jahr.*

| Durchschn. Alter. | Anfangs-zahl. | Wirkliche Todten. | Erwartete Todten. |
|---|---|---|---|
| 24½ | 1 | 0 | 0, 01 |
| 29½ | 1 | 0 | 0, 01 |
| 36½ | 1 | 0 | 0, 02 |
| 63½ | 1 | 1 | 0, 05 |
| 38 | 4 | 1 | 0, 09 |

## 7.

Nimmt man alle diese 30 Tabellen zusammen, so ist die *anfängliche Zahl*, die Zahl der *Wirklichen Todten* und die Zahl der *Erwarteten*,

5221; 743; 1048.

Und das Verhältniss der beyden letzten Zahlen ist

0, 7 : 1.



Digitized by Google

Werden die in dem erſten Termin beym Anfang der Geſellſchaft Zuſammengetretenen beſonders genommen, ſo hat man die Zahlen 1270; 301; 431, und das Verhältniſs der beyden letztern wiederum 0, 7 : 1.

Für die nachher hinzugekommenen ſind die Zahlen, 3951; 441; 623, und gleichfalls 441 : 623 = 0, 7 : 1.

## 8.

Dieſs Verhältniſs bleibt noch daſſelbe, wenn man die Correctionen der Tabellen gleich wegläſst. Denn in dieſem Fall hat man

| | die Zahl der *Aufgenommenen;* | *der wirkl. T.;* | *der Erwart.* |
|---|---|---|---|
| aus d. *erſten Termin* | 1253 | 298 | 424, 16 |
| aus den *folgenden* | 3862 | 432 | 603, 31 |
| | 5115 | 730 | 1027, 47 |

Das Verhältniſs der *Wirklichen* zu den *Erwarteten* iſt wiederum nahe an 0, 7 : 1.

## 9.

Das Verhältniſs der *wirklichen Todten* zu den *Erwarteten*, iſt inſonderheit

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| in der | 1*ſten* | Abw. nach | $15\frac{1}{2}$ | Jahren, | = 0, 7 : 1 |
| — | 2*ten* | — | 15 | — | = 0, 73 : 1 |
| — | 3*ten* | — | $14\frac{1}{2}$ | — | = 0, 75 : 1 |
| — | 4*ten* | — | 14 | — | = 0, 8 : 1 |
| — | 5*ten* | — | $13\frac{1}{2}$ | — | = 0, 73 : 1 |
| — | 6*ten* | — | 13 | — | = 0, 73 : 1 |
| — | 7*ten* | — | $12\frac{1}{2}$ | — | = 0, 57 : 1 |
| — | 8*ten* | — | 12 | — | = 0, 87 : 1 |

in

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| in der | 9*ten* | Abw. nach | $11\frac{1}{2}$ | Jahren, | = 0, 71 | : 1 |
| — | 10*ten* | — | 11 | — | = 0, 7 | : 1 |
| — | 11*ten* | — | $10\frac{1}{2}$ | — | = 0, 7 | : 1 |
| — | 12*ten* | — | 10 | — | = 0, 82 | : 1 |
| — | 13*ten* | — | $9\frac{1}{2}$ | — | = 1, 04 | : 1 |
| — | 14*ten* | — | 9 | — | = 0, 53 | : 1 |
| — | 15*ten* | — | $8\frac{1}{2}$ | — | = 0, 74 | : 1 |
| — | 16*ten* | — | 8 | — | = 0, 61 | : 1 |
| — | 17*ten* | — | $7\frac{1}{2}$ | — | = 0, 9 | : 1 |
| — | 18*ten* | — | 7 | — | = 0, 42 | : 1 |
| — | 19*ten* | — | $6\frac{1}{2}$ | — | = 0, 64 | : 1 |
| — | 20*sten* | — | 6 | — | = 0, 54 | : 1 |
| — | 21*sten* | — | $5\frac{1}{2}$ | — | = 0, 73 | : 1 |
| — | 22*sten* | — | 5 | — | = 0, 5 | : 1 |
| — | 23*sten* | — | $4\frac{1}{2}$ | — | = 0, 2 | : 1 |
| — | 24*sten* | — | 4 | — | = 1, 13 | : 1 |
| — | 25*sten* | — | $3\frac{1}{2}$ | — | = 0, 17 | : 1 |
| — | 26*sten* | — | 3 | — | = 0, 52 | : 1 |
| — | 27*sten* | — | $2\frac{1}{2}$ | — | = 0, 68 | : 1 |
| — | 28*sten* | — | 2 | — | = 1, 1 | : 1 |
| — | 29*sten* — 30*sten* | — | $1\frac{1}{2}$ — 1 | — | = 1, 4 | : 1 |

Alle diese Verhältnisse geben auch zum

Mittel-Verhältnis 0, 7 : 1.

## 10.

Nimmt man die zu gleichem Alter beym Eintritt gehörigen Personen aus allen Tabellen zusammen; oder statt des gleichen Alters dasselbige Quinquennium, so erhält man folgende Tabelle, wo aber die obgedachten Correctionen weggelassen sind.

| Alter beym Eintritt. | Anfangszahl. | Wirkliche Todte. | Erwartete. | Verhältniſs der Wirkl. zu den Erw. |
|---|---|---|---|---|
| 15—20 | 186 | 16 | 17, 25 | 0, 92 : 1 |
| 20—25 | 633 | 64 | 63, 51 | 1, 08 : 1 |
| 25—30 | 1055 | 114 | 146, 18 | 0, 78 : 1 |
| 30—35 | 1060 | 147 | 179, 79 | 0, 82 : 1 |
| 35—40 | 894 | 123 | 185, 33 | 0, 66 : 1 |
| 40—45 | 621 | 92 | 164, 02 | 0, 56 : 1 |
| 45—50 | 367 | 62 | 121, 57 | 0, 52 : 1 |
| 50—55 | 194 | 58 | 83, 88 | 0, 69 : 1 |
| 55—60 | 72 | 33 | 42, 11 | 0, 78 : 1 |
| 60—65 | 25 | 14 | 17, 11 | 0, 82 : 1 |
| 65—70 | 7 | 7 | 5, 87 | 1, 04 : 1 |
| 70 u. drüber. | 1 | 0 | 0, 87 | |
| Durchſchn. Alter $34\frac{1}{2}$ | 5115 | 730 | 1027 | 8, 67 : 11 =0,79 : 1 |

Hier fehlen nun noch 106 Eingetretene, woraus 13 als wirklich Geſtorbene, und 21 als Erwartete in Anſchlag kommen. Bey dieſen iſt das Verhältniſs nahe 0, 6 : 1. Dieſs müſste noch hinzukommen. Ueberhaupt aber iſt dieſs mittlere Verhältniſs nicht viel brauchbar.

Sondert man die unter 35 jährigen von denen ab, die älter im Anfang geweſen ſind, ſo iſt das Verhältniſs der *wirklich Geſtorbenen* zu den *Erwarteten* 0, 84 : 1 und bey den letztern 0, 64 : 1, wenn man ſie alle zuſammen nimmt. Werden auch bloſs die anfänglichen 1270 in der erſten Tafel verglichen, ſo findet man das gedachte Verhältniſs bey den unter *35 jährigen* 0, 74 : 1, und bey den ältern 0, 68 : 1. Da iſt der Unterſchied zwar geringer, aber doch immer noch die Abweichung bey den jüngern

jüngern geringer. Dieſs beſtätiget Hrn. *Kritters* Gedanken, daſs auch die gemeine Sterblichkeit bey den Ehefrauen nach dem Alter 35 bis 36 Jahre geringer ſey, als die Süſsmilchiſche Tafel ſie angiebt, wenn ſie gleich bis dahin damit nahe zuſammentreffend geweſen ſey. Denn wenn die tabellariſche Sterblichkeit ſo wäre, wie nach *Süſsmilchs* Tafel, ſo müſste in der ausgeſuchten Geſellſchaft die Sterblichkeit bey den ältern ſich der tabellariſchen mehr nähern, als bey den jüngern, davon hier das Gegentheil ſtatt findet.

## II.

In Hinſicht der *Ehemänner* habe ich nichts mehr als die folgende *31ſte Tabelle.*

*Tab. 31.*

| Durchſchn. Alter. | Anfangszahl. | Wirckliche Todte nach 16 Jahren. | Erwartete in eben der Zeit nach Süſsmilch. |
|---|---|---|---|
| $23\frac{1}{2}$ | 2 | 0 | 0, 410 |
| 28 | 21 | 4 | 4, 900 |
| 33 | 86 | 18 | 23, 085 |
| $37\frac{1}{2}$ | 157 | 33 | 49, 815 |
| 43 | 169 | 43 | 63, 260 |
| 47 | 196 | 85 | 87, 671 |
| 53 | 154 | 80 | 82, 585 |
| $57\frac{1}{2}$ | 120 | 90 | 77, 313 |
| $62\frac{1}{2}$ | 77 | 63 | 57, 763 |
| 68 | 43 | 34 | 35, 802 |
| $72\frac{1}{2}$ | 8 | 7 | 7, 206 |
| $47\frac{1}{2}$ | 1033 | 457 | 489, 8 |

Das Verhältniſs der wirklichen Todten zu den Erwarteten iſt 0, 93 : 1.

Allein hier ist die Zahl der Anfangs eingetretenen, die nachher von der Gesellschaft getrennt sind, und um die man sich nicht weiter bekümmert hat, ansehnlich, nämlich 237. Werden auch diese nach den obigen Voraussetzungen in §. 3. vertheilet, so erhält man folgende Tabelle.

*Tab. 32.*

| Durchschn. Alter. | Anfangszahl. | Wirkliche Todte. | Erwartete Todte. |
|---|---|---|---|
| $23\frac{1}{2}$ | 0, 5 | 0, | 0, 1 |
| 28 | 4, 5 | 0, 696 | 1, 17 |
| 33 | 20 | 3, 2 | 5, 36 |
| $37\frac{1}{2}$ | 36 | 7, 16 | 11, 42 |
| 43 | 39 | 9, 65 | 14, 61 |
| $47\frac{1}{2}$ | 45 | 13, 23 | 20, 14 |
| 53 | 35 | 13, 75 | 18, 77 |
| $57\frac{1}{2}$ | 27 | 7, 31 | 17, 13 |
| $62\frac{1}{2}$ | 18 | 10, 3 | 13, 51 |
| 66 | 10 | 6, 44 | 8, 3 |
| $72\frac{1}{2}$ | 2 | 1, 48 | 1, 8 |
| $47\frac{1}{2}$ | 237 | 69 | 112 |

Also wird die Summe aller *wirklichen* Todten $= 457 + 69 = 526$; und die Summe aller Berechneten $490 + 112 = 602$, und das Verhältniss $526 : 602 = 0, 87 : 1$.

Dieselbige Summe der *berechneten* Todten findet man auch ganz nahe eben so, wenn auf einmal $1033 : 490 = 237 : 112$ genommen wird. Eben so wenn, um die *wirklichen* Todten zu finden, alle 237

beym

beym Eintritt vom gleichen Durchschnitts-Alter, $47\frac{1}{2}$ Jahr angenommen werden, dann 8 Jahr in der Gesellschaft gelebet haben, und darauf als $55\frac{1}{2}$ jährige in 8 Jahren nach den Tabellen weggestorben seyn sollen. Es wird die Zahl der wirklich Todten 69, wie vorher.

## 12.

Für jede Classe von Personen, in Hinsicht des Alters nach Quinquennien vertheilet, ist das Verhältniss wie folget.

| Alter. | Verhältniss. | Alter. | Verhältniss |
|---|---|---|---|
| 20—30 Jahr. | 0, 71 : 1 | 50—55 Jahr. | 0, 92 : 1 |
| 30—35 | 0, 75 : 1 | 55—60 | 1, 03 : 1 |
| 35—40 | 0, 66 : 1 | 60—65 | 1, 02 : 1 |
| 40—45 | 0, 68 : 1 | 65—70 | 0, 92 : 1 |
| 45—50 | 0, 91 : 1 | 70—75 | 0, 94 : 1 |

Das Mittel aus diesen ist 0, 85 : 1, dafür aber richtiger nach dem vorhergehenden 0, 87 : 1 genommen wird. Denn der mittlere Werth für dies Verhältniss darf nicht aus einzelnen besondern Werthen desselben gesucht werden. Diese Gröfse ist veränderlich ihrer Natur nach. Aber wenn die Zahlen der Todten in mehreren Fällen zusammen genommen werden, so kommt ein Mittel heraus, das sich brauchen läfst.

Sondert man die unter 45 jährigen ab von den ältern, so ist das Verhältniss für jene jüngere gewesen = 0, 68 : 1
und für die über 45 jährigen = 0, 95 : 1

Die

Die unter 45 jährigen Ehemänner haben alſo eine geringere Sterblichkeit gehabt, als die unter 35 jährigen Frauen; allein die über 45 jährigen haben ſie gröſſer, und nahe ſo groſs gehabt, als die gemeine iſt nach der Süſsmilchiſchen Tafel.

## 13.

Daſs im Ganzen das Verhältniſs der wirklich Geſtorbenen zu den Erwarteten bey den Männern gröſser iſt, als bey den Frauen, jenes nämlich 0, 87 : 1, dieſes 0, 7 : 1 beſtätiget noch für ſich nicht, was ſonſt wahrſcheinlich iſt, daſs die Sterblichkeit des *weiblichen Geſchlechts* auch in communi vita etwas geringer ſey als bey den Männern. Die Sterblichkeit kann im gemeinen Leben bey beyden Geſchlechtern gleich groſs ſeyn, und dennoch muſste hier bey den Männern jenes Verhältniſs gröſſer ſeyn aus zweyen Urſachen. Sie waren durchgehends beym Eintritt älter. Ihr Durchſchnitts-Alter war 47½ Jahr; der Frauen ihres nur 34½. Dazu wird bey den Männern das obige Verhältniſs nach 16 Jahren beſtimmt, bey den Frauen iſt es bey der gröſsten Zahl derſelben nach einer kürzern Zeit berechnet. Es verſteht ſich, je älter die Perſonen ſind, und je länger die Zeit des Ausſterbens, deſto mehr muſs ſich das Verhältniſs der wirklich Geſtorbenen zu den tabellariſchen der Gleichheit nähern.

Um

Digitized by Google

Um hier richtig zu vergleichen, kann nur die erste Tabelle bey den Ehefrauen, welche die Abweichung nach 15½ Jahren giebt, gebraucht werden. Die 31ste und 32ste von den Männern enthält sie nach 16 Jahren. Dieser Unterschied ist nicht erheblich. Dann ist

| Alter. | Verhältniss bey den *Frauen.* | Verhältniss bey den *Männern.* |
|---|---|---|
| 20—30 | 0, 81 : 1 | 0, 71 : 1 |
| 30—35 | 0, 60 : 1 | 0, 75 : 1 |
| 35—40 | 0, 71 : 1 | 0, 66 : 1 |
| 40—45 | 0, 60 : 1 | 0, 68 : 1 |
| 45—50 | 0, 67 : 1 | 0, 91 : 1 |
| 50—55 | 0, 67 : 1 | 0, 92 : 1 |
| 55—60 | 0, 77 : 1 | 1, 03 : 1 |
| 60—65 | 0, 80 : 1 | 1, 02 : 1 |
| 65—70 | 1, 19 : 1 | 0, 92 : 1 |

Nimmt man alle *unter 45 jährige* bey beyden Geschlechtern zusammen, um einen Durchschnitts-Werth zu haben, so wird das Verhältniss *bey den Frauen* 0, 69 : 1

— — — *bey den Männern* 0, 68 : 1

so weit gleich; oder doch bey den Männern, wenn auf das halbe Jahr Unterschied in der Zeit gesehen wird, nur sehr wenig geringer.

Allein, wenn die über 45 jährigen verglichen werden, so ist solches bey *den Frauen* 0, 73, und bey den *Männern* 0, 95.

Daraus läfst sich schliefsen, dafs bey solchen Instituten zur Versorgung der Wittwen sich annehmen lasse,

es

es ſey das Verhältniſs der *wirklich Geſtorbenen zu den berechneten nach einer Zeit von 16 Jahren* (die *Sterblichkeit während dieſes Zeitraums*, denn mehr heiſst das nicht) *einander gleich bey Männern und Frauen, die nicht älter ſind als 45 Jahr beym Eintritt; dagegen, wenn ſie älter ſind, ſey ſolche bey den Frauen* auf 0, 7 : 1 und *bey den Männern* 0, 9 : 1 *zu ſchätzen.*

## 14.

So weit gehen die Erfahrungen, die ich aus den gebrauchten Regiſtern der Calenbergiſchen Geſellſchaft habe ziehen können. Wichtig allerdings, um einigermaſsen über die Gröſse des Unterſchiedes urtheilen zu können. Aber doch auch zu mangelhaft, daſs man nicht Urſachen hätte künftig dergleichen noch mehr zu ſammeln.

## 15.

Einige andere hieher gehörige Erfahrungen habe ich aus einer Tabelle gezogen, die ein Engländer *Dale* ſeinem mit Einſicht und Fleiſs geſchriebenen *Supplement to calculations of the Values of Annuities* (*) beygefüget hat.

Es

(*) Der etwas lange Titel heiſst ſo: *Supplement to calculations of the Values of Annuities, publiſhed for the uſe of Societies inſtituted for Benefit of Age. Containing various illuſtrations of the doctrine of Annuities, and complet Tables of the Value of 1. L. immediate Annuity. Together*

Es ist durch 7 Jahre von Jahr zu Jahr nach *Halleys* Tafel berechnet, wie viele von den Interessenten hätten abgehen sollen, und damit sind die wirklich Gestorbenen verglichen. Solche Vergleichungen sind nicht genug, wenn etwas Allgemeines daraus soll gefolgert werden, wie sich unten weiter zeigen wird. Es wird dabey nicht unterschieden, wie lange die von gleichem Alter vorhandene Personen schon in der Gesellschaft gelebet haben? Die in demselben Jahr erst Eingetretene werden mit denen zusammen genommen, die in den vorhergehenden Jahren nach und nach hinzu gekommen sind. Eigentlich sollten die zugleich Eingetretene für sich allein nach ihrem allmähligen Absterben bemerket werden. Indessen ist jenes auch nicht ganz unbrauchbar. Wenn man mehr solche Tabellen hätte, wie *Deparcieux* seine von den Renteniers, die gleichfalls als eine ausgesuchte Gesellschaft zu betrachten sind, so liesse sich allerley nützliches daraus folgern. Diese sehe ich nämlich auch als

*Together with investigations of the State of the laudable Society of Annuitants, shewing what Annuity each Member hath purchased, and real Mortality therein from its Institution, compared with D. Halleys Table.* London. 1777. Diese so genannte laudable Society kennet man aus *D. Price.* Sie gehöret zu den unbestehbaren Instituten, die auf einen ohngefähren Ueberschlag, und auf sehr unbestimmte Grundsätze gebauet sind. Dergleichen giebt es jenseits des Meers so gut als bey uns.

Digitized by Google

als ſo eine an, welche ſagt, wie viele von der Zahl der vorhandenen Mitglieder von jedem Alter jährlich abgehen, ohne Unterſchied, ob es neue oder alte Genoſſen ſind.

Was ich aus *Dale's* Rechnungen habe ziehen können als brauchbar zu meiner gegenwärtigen Unterſuchung, zeigen folgende Tabellen.

*Tab. 33.*

*Die aufgeführten Mitglieder ſind zugleich eingetreten, und die Todten ſind die, welche in dem erſten Jahr erfolget ſind.*

| Ihr Alter. | Durchſchn. Alter. | Anfangszahl. | Wirkliche Todte. | Berechnete Todte nach Süſsmilch. |
|---|---|---|---|---|
| 20—30 | 25½ | 42 | 1 | 0, 45 |
| 30—40 | 36 | 121 | 1 | 2, 1 |
| 40—50 | 44 | 100 (*) | 2 | 3, |
| 50—60 | 55 | 6 | 0 | 0, 21 |
| 20—60 | 37 | 269 | 4 | 5, 76 |

Das Verhältniſs der wirklich Geſtorbenen zu den berechneten iſt 0, 7 : 1.

16. Die

(*) Von den letzten 100 waren einige ſchon länger in der Geſellſchaft geweſen. Man kann die Zeit zu 1½ Jahr annehmen, und die Erwarteten zu 3 anſetzen, ſonſt würden es nur 2,02 ſeyn.

Digitized by Google

## 16.

Die folgende Tabelle zeigt, wie viele Personen eines bestimmten Alters durch eine Erfahrung von 7 Jahren gestorben sind, in Vergleich mit denen, welche nach *Halleys* Tafel hätten sterben sollen. Hier aber ist das Alter nicht das Alter beym Eintritt in die Gesellschaft, sondern überhaupt das Alter der Personen, aus denen in demselben Jahr der Abgang geschehen ist. Ueberdiefs sind es ohne Zweifel Personen von beyden Geschlechtern gewesen.

*Tab. 34.*

| Alter der Personen. | Wirkliche Todten. | Berechnete nach Halley. |
|---|---|---|
| 1—20 | 4 | 2, 3084 |
| 20—30 | 11 | 10, 9904 |
| 30—40 | 23 | 39, 0923 |
| 40—50 | 33 | 62, 2487 |
| 50—60 | 17 | 40, 7081 |
| 60—70 | 5 | 7, 5337 |
| | 93 | 162, 882 |

Diefs Verhältnifs ist 0, 57 : 1. Nach *Süfsmilchs* Tafel ist es nahe dasselbe. Ueberhaupt waren aus 1469 in die Gesellschaft aufgenommenen von verschiedenem Alter, während 7 Jahren gestorben 93, statt dafs nach *Halley* hätten sterben sollen 163.

## Zweyter Abschnitt.

### *Allgemeine Bestimmung der Abweichung der Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften von der im gemeinen Leben.*

### 18.

Durch eine Betrachtung aus der Natur der Sache, durch eine theoretische Speculation, wenn man will, kann man der Erfahrung oftmals auf halbem Wege entgegen kommen. Ich habe versucht, was sich hier thun lasse? Jene kann wenigstens zeigen, welche Erfahrungen man haben, und wie man sie verbinden müsse, um allgemeine Sätze daraus zu ziehen. Das ist Dienst genug. Facta können nicht aus Begriffen a priori erkannt werden; aber a priori kann man die Methode finden, wie Facta gesammlet, geordnet und verglichen werden müssen, um das Gesetz ihrer Folge zu erkennen.

### 19.

Es versteht sich von selbst, was hier *ausgesuchte Gesellschaften* seyn sollen; solche nämlich, deren Genossen beym Eintritt als *gesund* wenigstens, oder auch als *gesunde und starke* Personen, anzusehen sind. Man könnte auch lauter schwache und kranke aussuchen. Erfahrungen über die Sterblichkeit in Hospitälern, sind auch an sich und zu andern Absichten brauchbar. Hier aber setze ich solche bey Seite.

Der

Der Kürze wegen soll die Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften, welche die Erfahrung zeiget, hier die *wirkliche* Sterblichkeit heisen. Die *tabellarische* dagegen diejenige, welche nach den Tabellen statt findet. Es versteht sich, dass so wenig bey jener als bey dieser davon die Rede sey, was in jedem einzelnen Fall, in jeder kleinen Gesellschaft, in jedem einzeln Jahr sich zeiget. Sie mus als ein *Mittel*, oder *Durchschnitt* aus mehreren einzelnen Erfahrungen genommen werden.

## 20.

Daraus folgt denn von selbst: *Wenn aus einer bestimmten Zahl a, von Personen gleichen Alters, während einer bestimmten Zeit, z gestorben sind und y noch leben, so wird auch aus der anfänglichen Zahl r. a, die Zahl der Gestorbenen in derselben Zeit r. z, und die Zahl der noch übrig gebliebenen r. y seyn.*

## 21.

Als *Grundsatz* wird folgendes angenommen: *Die wirkliche Sterblichkeit kann in ausgesuchten Gesellschaften, worin sie Anfangs geringer ist, als die tabellarische, nachher nie wieder gröser werden, als die letztere,* (auch nicht kleiner wenn sie Anfangs gröser gewesen ist.) *Sie mus sich der letztern immer mehr nähern, bis sie ihr, wenn nicht eher, doch im letzten Lebensjahre gleich wird.*

Die Sterblichkeit ist in jedem Fall in dem höchsten Lebensjahr = 1, in ausgesuchten Gesellschaften so wohl als im gemeinen Leben. Beyde können aber eher schon einander gleich seyn. Ist die ausgesuchte Gesellschaft so eine nur in Hinsicht der anfänglichen Gesundheit, so kann die Folge davon nur auf eine gewisse Zeit dauern. Aber es ist gar kein Grund vorhanden, warum die wirkliche Sterblichkeit jemals wieder gröser werden sollte als die tabellarische, wenn sie Anfangs in den ersten Jahren kleiner ist. Eben so in dem entgegengesetzten Fall. Findet sich nun in einzelnen Fällen dies anders, so gehören solche blos zu den einzelnen Fällen, die keine allgemeine Regel geben.

Ist die Zahl der Lebenden im Anfang eines Jahrs, oder eines Theils davon $y$, und der Abgang durch den Tod während dieses Zeitraums $-\Delta y = \Delta z$, wo $\Delta z$ die *Zunahme der Gestorbenen* ist, so ist $\frac{\Delta z}{y}$ die *Sterblichkeit.* Nun sey $\frac{\Delta z'}{y'}$ in der ausgesuchten Gesellschaft, was $\frac{\Delta z}{y}$ für dieselbige Zeit nach den Tabellen ist, so ist $\frac{\Delta z'}{y'} = S'$ die *wirkliche Sterblichkeit;* $\frac{\Delta z}{y} = S$ die *tabellarische.*

22.

*Zusatz.* Es sey $\frac{\Delta z}{y} - \frac{\Delta z'}{y'} = D$ nach einer bestimmten Zeit, so *kann auch diese Differenz in der Folge nicht*

Digitized by Google

*nicht wiederum gröſſer werden, sie sey Anfangs nun positiv oder negativ.* Der Vorzug an minderer Sterblichkeit aus der anfänglichen Gesundheit kann nachher nicht mehr wachsen: eben so der anfängliche Nachtheil nachher nicht mehr zunehmen.

Das Verhältniſs der Sterblichkeit ist

$$= S : S' = S : S - D = 1 : 1 - \frac{D}{S} \cdots$$

Nimmt nun die tabellarische Sterblichkeit S immer zu, und die Differenz ab, so wird auch ihr Verhältniſs gegen einander sich immer mehr der Gleichheit nähern. Nimmt aber die Sterblichkeit S auch wiederum ab, so wird ihr Verhältniſs sich auch wiederum von der Gleichheit entfernen.

## 23.

Ferner nehme ich *als Grundsatz* dieſs an. *Das höchste Alter des menschlichen Lebens ist in der ausgesuchten Gesellschaft daſſelbe, wie im gemeinen Leben.* In jener können und mögen mehrere Personen diese höchste Stufe erreichen; allein sie selbst setze ich nicht höher an, als die in den Tabellen. In dem vermischten Haufen wird es doch auch Einen oder den andern geben, der eben so hoch hinaufkommt, wenn die anfängliche Zahl der Personen nur groſs genug genommen wird.

Die *Sterblichkeits-Linie* kann als *asymptotisch* angenommen werden, (*Einleit. von Leibrenten. Zusatz* zum 2ten Cap. §. 11.) Daraus könnte man schlieſsen, das

höchſte Lebensjahr ſey ſelbſt in den Tabellen höher oder niedriger zu ſetzen, je nachdem man die Grundzahl oder die Zahl der Gebohrnen in ihnen gröſser oder kleiner nimmt. Allein eigentlich ſollte das *höchſte Lebensziel* das Jahr ſeyn, über welches kein Individuum aus jeder *endlichen* Anfangszahl, wie groſs ſie auch ſey, hinauskommt. Alsdenn iſt zwiſchen einer groſsen und kleinen Geſellſchaft kein anderer Unterſchied, als daſs von jener mehrere, von dieſer weniger ſolches erreichen. Geht man von dieſem feſten Begriff ab, ſo wird das höchſte Ziel ſchwankend. Uebrigens kommt nicht viel, bey denen von jüngern Alter gar nichts, darauf an, ob man ein paar Jahr höher oder niedriger geht.

## 24.

Es ſey M N P R G (Fig. 1.) *die Linie der Sterblichkeit* nach den Tabellen, die aus dem gemeinen Leben genommen ſind. Die *Abſciſſen* A B, A C, A D, u. ſ. f. die *Lebensjahre*, A G das *höchſte Alter*. Die *Ordinate* A M iſt die *Grundzahl* der Tafel, die Zahl *der Gebohrnen*. B N und die übrigen *Ordinaten* ſtellen die noch Lebenden vor, zu einer beſtimmten Zeit. Wird durch N eine Parallele mit A G, nämlich N G′ gezogen, ſo ſind P C′, R D′, G G′, die Geſtorbenen aus B N während der Zeiten, welche durch die zugehörigen Abſciſſen, von B angefangen, bezeichnet ſind.

Die Zahl der Lebenden B N ſey eine eben ſo groſse Zahl ausgeſuchter Perſonen, die alle von gleichem Alter

A B in eine Gesellschaft zusammentreten. Die *Sterblichkeits-Linie für diese Gesellschaft* sey N p r G. Es sey überhaupt die Abscisse vom B an = x. Sie wird endlich B G, oder die *Altersergänzung*.

Ferner sey die Anfangszahl B N = *a*
Die Ordinaten C P, D R, u. s. f. = *y*
C p, D r, E s, u. s. f. = *y′*
P C′, R D′, S E′, u. s. f. = *z*
p C′, r D′, s E′ u. s. f. = *z′*

## 25.

Von selbst folgt nun aus den obigen Grundsätzen:

1) Wenn y = a, so ist auch y′ = a, und wenn y = o, so auch y′ = o. Beyde Gesellschaften gehen zu gleicher Zeit ganz aus. §. 23.

2) y′ oder die Zahl der Lebenden aus *a* in der ausgesuchten Gesellschaft kann nie kleiner seyn als y, als die Zahl der zu gleicher Zeit noch übrigen aus *a* in der gemeinen Gesellschaft, daferne jenes im Anfang gröser ist, wegen der geringern Sterblichkeit. Auch kann jenes nicht gröser werden, als dieses, wenn es Anfangs kleiner gewesen ist.

Auch kann das Verhältniss y′ : y *nicht beständig* seyn. Denn im Anfange ist y′ = a = y; und am Ende ist y′ = o = y. In der Zwischenzeit sind beyde verschieden gewesen, oder es hätten beyde Curven ganz zusammen fallen müssen.

Eben so ist auch das *Verhältniss der in gleicher Zeit Abgegangenen z′ : z veränderlich.* Im Anfang sind beyde diese Zahlen = o; und am Ende beyde = a.

So ist auch das Verhältniss der Sterblichkeit in beyden S′:S oder $\frac{\Delta z'}{y'} : \frac{\Delta z}{y}$ veränderlich. Am Ende sind beyde einander gleich. Wären sie es immer, so fielen die Curven zusammen. Im Anfang ist S′:S = Δy′:Δy, weil alsdenn y′ = y ist.

## 26.

*Die beyden Curven NPSG und NpsG können sich nicht schneiden zwischen den Stellen N und G, auch nicht zusammenfallen, als in G.* Dieſs ist hier ein erheblicher Satz, der so erwiesen wird:

Man setze irgendwo zwischen N und G sollen sie sich schneiden z. B in T und t zusammen, so würde F T = F t, oder y′ = y seyn. Soll nun t G unter T G in der Figur fallen, so muſs Δy′ > Δ y seyn; folglich $\frac{\Delta y'}{y'} > \frac{\Delta y}{y}$; also S′ die wirkliche Sterblichkeit gröſser als die tabellarische S, was gegen den Grundsatz in §. 19. ist.

Sollen die Curven von T an bis G zusammenfallen, so ist zwischen F G, auch Δ y′ = Δ y. Vorher aber war S′ < S, und y′ > y. Die Abnahme an dieser Stelle F ist Δ y′ > Δ y. Folglich ist in F das Verhältniss $S' : S = \frac{\Delta y'}{y + \Delta y'} : \frac{\Delta y}{y + \Delta y}$, oder wenn

Δ y′

$\Delta y' = \Delta y + e$ gesetzet wird $= \frac{\Delta y + e}{y + \Delta y + e} : \frac{\Delta y}{y + \Delta y}$

$= \frac{1 + \frac{e}{\Delta y}}{1 + \frac{e}{y + \Delta y}} : 1$, das ist, weil $\frac{e}{\Delta y} > \frac{e}{y + \Delta y}$, grösser als 1 : 1.

Die *wirkliche* Sterblichkeit hätte also an der Stelle F grösser seyn müssen, als die tabellarische, was dem Grundsatze zuwider ist.

Wenn die wirkliche Sterblichkeit vorher *grösser* gewesen ist, als die *tabellarische*, so würde $S' : S = \frac{\Delta y - e}{y + \Delta y - e} : \frac{\Delta y}{y + \Delta y} = \frac{1 - \frac{e}{\Delta y}}{1 - \frac{e}{y + \Delta y}} : 1$ daselbst Statt gefunden haben. Aber $1 - \frac{e}{\Delta y}$ ist *kleiner* als $1 - \frac{e}{y + \Delta y}$. Also hätte S' an dieser Stelle kleiner seyn müssen als S, was wiederum gegen die Natur der Sache ist.

Allein in dem letzten Puncte G, ist $y = o$. Daselbst ist also $S' : S = \frac{\Delta y + e}{\Delta y + e} : \frac{\Delta y}{\Delta y}$, wie es seyn soll.

## 27.

Wenn vorausgesetzt wird, *das Verhältniss der wirklichen Sterblichkeit zur tabellarischen solle sich immer mehr und mehr der Gleichheit nähern*, (nach §. 20.) so folgt auch, *dass der Ueberschuss der Lebenden* in der ausgesuchten

ſuchten Geſellſchaft über den in der gemeinen, oder überhaupt die *Differenz* $y' - y$, *wenn ſie irgendwo anfängt abzunehmen, nachher niemals wiederum ſo groſs werden könne, als ſie geweſen iſt.* Sollte ſie auch nachher wiederum wachſen, und von neuen ein *Gröſstes* werden, ſo kann ſie doch nie wieder ſo groſs werden, als ſie das erſtemal geweſen iſt.

Iſt ſie nämlich irgendwo, z. E. in D, wo $y' - y = R\,r = v$, ein *Gröſstes*, und fängt von da an abzunehmen, ſo iſt nach dem Geſetz der *Continuität* daſelbſt $dz' = dz$, wo nämlich dieſs *augenblickliche* Decremente ſind. Da iſt alſo $S : S' = \frac{dv}{y} : \frac{dy'}{y'} = y' : y = 1 + \frac{v}{y} : 1$. Wenn nun auch *v*, welches von da an abnimmt, auch nachher wiederum wächſt, und von neuen ein Gröſstes wird, wo man $v'$ dafür ſchreiben kann, ſo wird an dieſer zwoten Stelle $S : S' = 1 + \frac{v'}{y} : 1$ ſeyn. Nach der obigen Vorausſetzung muſs aber $1 + \frac{v'}{y}$ weniger von der Einheit verſchieden ſeyn, als $1 + \frac{v}{y}$, oder $\frac{v'}{y}$ kleiner als $\frac{v}{y}$ ſeyn. Alſo da der Diviſor y in $\frac{v'}{y}$ kleiner iſt, als in $\frac{v}{y}$, auch $v'$ nothwendig kleiner ſeyn als v.

## 28.

Noch mehr. Unter eben der Vorausſetzung kann *die Differenz* $y' - y$, *wenn ſie einmal ein Maximum geweſen*

Digitized by Google

*gewesen ist, und dann abnimmt, nachher nicht wieder zunehmen, und noch einmal ein Maximum werden.*

Denn ist sie in D, als Rr, ein *Maximum*, und wiederum ein solches in E, als Ss, so ist sie zwischen diesen beyden Stellen ein *Minimum* gewesen. Im Fall des *Minimi* ist auch $\Delta z' = \Delta z$. Also hat das Verhältniss der *wirklichen* Sterblichkeit zur *tabellarischen* in D, H, und E nach §. 27. folgendes gewesen seyn müssen:

$$1 : 1 + \frac{Rr}{RD}; \quad 1 : 1 + \frac{Ii}{IH}; \quad 1 : 1 + \frac{Ss}{SE}.$$

Weil sich aber solches immer mehr der Gleichheit nähern soll, so muss $\frac{Rr}{RD} > \frac{Ii}{IH}$, und $\frac{Ii}{IH} > \frac{Ss}{SE}$ seyn. Aber $RD > IH$, folglich $Rr > Ii$, und $IH > SE$, folglich $Ii > Ss$. Daher kann Ii nicht kleiner als Ss gewesen seyn. Also die Differenz kein Minimum gewesen seyn. Folglich kann sie nur einmal ein Gröstes seyn.

Es folgt eben dasselbe, wenn man die Differenz *verneinend* nimmt.

## 29.

Nun sey überhaupt das Verhältniss zwischen $y'$ und $y$ so ausgedruckt

$$y' = A + By + Cy^2 + Dy^3 + + +.$$

Weil $y' = o$, wenn $y = o$, so ist $A = o$.

Also $y' = By + Cy^2 + Dy^3 + + +$.

Und weil ferner $y = a$, wenn $y' = a$, so ist auch

$a = Ba + Ca^2 + Da^3 + + +$.

Folglich

Folglich $1 = B + Ca + Da^2 + + +$.
Daher $B = 1 - Ca - Da^2 - - - -$,
und folglich $y' = y - Cay - Da^2y - -$
$+ Cy^2 + Dy^3 + +$

$y' - y = C(y^2 - ay) + D(y^3 - a^2y) + +$.

## 30.

In dieſer Gleichung muſs (nach §. 20.) $ry'$ und $ry$ ſtatt $y'$ und $y$ kommen, wenn $r\,a$ für $a$ geſetzet wird. Daher kann man für $a$ die Einheit ſetzen, da denn $y$ ein eigentlicher Bruch iſt. Nun auch

$y' - y = Cy(y - 1) + + Dy(y^2 - y) + +$
So iſt $y' - y = - Cy - Dy - Ey - -$
$+ Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + +$.

## 31.

Weil $y' - y$ nur in zween Fällen $= 0$ wird, wenn nämlich $y = a$ und wenn $y = 0$. ſo hat die Gleichung aus §. 29.

$0 = C(y^2 - ay) + D(y^3 - a^2y) + +$

nur zwo reelle Wurzeln. Und weil $dy' - dy$ nur einmal $= 0$ iſt, unter der Vorausſetzung im §. 28, ſo hat die Gleichung

$0 = 2Cydy - Cady + 3Dy^2dy - a^2Ddy + - +$
und $0 = 2Cy - Ca + 3Dy^2 - a^2D + -$
nur Eine reelle Wurzel.

Dieſs

Dieſs leitet auf die *Hypotheſe*, daſs die Coefficienten D, und die folgenden, = o, angenommen werden können. Aber es iſt bloſs Hypotheſe.

## 32.

Das Verhältniſs der *wirklichen Sterblichkeit zur tabellariſchen* iſt im allgemeinen

$$\frac{dz'}{y'} : \frac{dz}{y} = -\frac{dy'}{y'} : -\frac{dy}{y} = \frac{dv'}{y} : \frac{dv}{y}.$$

Nun iſt aber aus §. 30.

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{B + 2Cy + 3Dy^2 + +}{B + Cy + Dy^2 + +} \cdot \frac{dy}{y}, \text{ alſo}$$

$$S' : S = \frac{B + 2Cy + 3Dy^2 + +}{B + Cy + Dy^2 + +} : 1, \text{ welches Verhältniſs die Gleichheit wird, wenn } y = o.$$

## 33.

Es ſey alſo überhaupt

$$S' : S = 1 + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + + : 1.$$

Wenn die Erfahrungen *hinreichten*, die Coefficienten dieſer Reihe zu beſtimmen, oder auch die in folgender Reihe:

$1 + \frac{\mu}{a} \cdot y + \frac{\nu}{a^2} \cdot y^2 + \frac{\pi}{a^3} y^3 + +$ (weil jene Coefficienten aus demſelben Grunde, wie B, C, D, nach §. 30. die Potenzen der Anfangszahl *a* zu Diviſoren haben müſſen, wenn die Zähler beſtändige und von *a* unabhängige Gröſsen ſeyn ſollen,) ſo würden alsdenn dadurch auch die Coefficienten B, C, D u. ſ. f. gegeben ſeyn.

Oder

Oder liefsen sie sich nur so weit bestimmen, dafs die Reihe stark convergirte, so würde auch das genügen. Es kommt nämlich auf $\mu$, $\nu$, $\pi$, u. s. f. an, denn $\frac{y}{a}$, $\frac{y^2}{a^2}$ u. s. f. sind jedesmal Potenzen von Brüchen.

Da nämlich

$$\frac{B+2Cv+3Dy^2+4Ey^3++}{B+Cy+Dy^2+Ey^3++}=1+\alpha y+\beta y^2\gamma y^3++$$

also

$$B+2Cy+3Dy^2+4Ey^3++=B+B\alpha\left\{\begin{matrix}+C\end{matrix}\right\}y+B\beta\left\{\begin{matrix}+C\alpha\\+D\end{matrix}\right\}y^2+B\gamma\left\{\begin{matrix}+C\beta\\+D\alpha\\+E\end{matrix}\right\}y^3++$$

so erhält man

$$\frac{B\alpha+C-2C=0}{B\alpha=C},$$

Ferner $B\beta+C\alpha+D-3D=0$

$$\frac{B\beta+C\alpha=2D}{\frac{B\beta+B\alpha^2}{2}=\frac{B(\beta+\alpha^2)}{2}=D.}$$

$$\frac{B\gamma+C\beta+D\alpha+E-4E=0}{B\gamma+C\beta+D\alpha=3E}$$

$$B\gamma+B\alpha\beta+\frac{B\beta\alpha+B\alpha^3}{2}=3E$$

$$B.\frac{(2\gamma+(3\beta+\alpha^2)\alpha)}{2.3}=E.\text{ u. s. f.}$$

Daraus wird nach §. 29.

$$y'=By+B.\alpha y^2+B.\frac{(\beta+\alpha^2)}{1.2}\cdot y^3$$

$$+B.\frac{(2\gamma+(3\beta+\alpha^2)\alpha}{1.2.3}++$$

Und

Und weil (ebendaselbst)

$$B = 1 - B\alpha - \frac{B(\beta + \alpha^2)}{1.\ 2} - \frac{B(2\gamma + (3\beta + \alpha^2)\alpha)}{1.\ 2.\ 3} - - -$$

so findet man B durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, u. s. f.

Ich habe aus einigen Erfahrungen die letztern Grössen gesucht, aber keine bequeme und stark convergirende Reihe gefunden. Allein ich hatte auch derzeit nur noch wenige Beobachtungen vor mir. Das ist künftig noch weiter zu versuchen.

## 34.

Wird als *Hypothese* angenommen $S' : S = 1 + by : 1$. wo $b$ negativ ist, wenn die wirkliche Sterblichkeit die kleinere ist, so wird

$$B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 = B + Cy + Dy^2 + Ey^3 + + \\ + Bby + Cby^2 + bDy^3 + +$$

Also $2C = C + bB$

$$C = bB$$

Ferner $D + Cb = 3D$

$$D = \frac{b.C}{2} = \frac{Bb^2}{2}$$

$4E = E + bD$

$$E = \frac{bD}{3} = \frac{Cb^2}{2.3} = \frac{Bb^3}{2.3}, \text{ u. s.}$$

Folglich

$$y' = B\left(y + \frac{b}{1} \cdot y^2 + \frac{b^2}{1.2} y^3 + \frac{b^3}{1.2.3} y^4 + +\right)$$

Und weil nach §. 29.

$$B = 1 - Bb - \frac{Bb^2}{2} \cdot - \frac{Bb^3}{2.3.} - -$$

so wird $B = \frac{1.}{1 + \frac{b}{1} + \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^3}{1.2.3.} + + +}$

$= \frac{1}{e^b}$, wo $e$ die Zahl ist, wozu der *Logarithmus naturalis* $= 1$ gehöret.

Daher $y' = \frac{1}{e^b} \cdot y \left(1 + \frac{b\,v}{1} + \frac{b^2\,y^1}{1.2} + +\right)$

$= \frac{1}{e^b} \cdot e^{b\,y} \cdot y = y.\,e.^{(y-1)b}$

## 35.

Eine *zwote Hypothese* ist die, deren schon oben erwähnt ist §. 31. Sie ist leichter, und die einfachste, auch hier zu meiner Absicht die bequemste. Darum erkläre ich sie nicht für die richtigste, oder am nächsten zutreffende mit den Beobachtungen. Man nimmt nämlich an, es sey $y' = B\,y + C\,y^2$.

## 36.

Daraus findet man auch das allgemeine *Verhältniß der Sterblichkeit* auf folgende Art.

Es ist nach §. 32.

$$B + 2\,C\,y = \left.\begin{matrix} B + B\alpha \\ + C \end{matrix}\right\} \cdot y + \left.\begin{matrix} B\beta \\ + C\alpha \end{matrix}\right\} \cdot y^2 + \left.\begin{matrix} B\gamma \\ + C\beta \end{matrix}\right\} \cdot y^3 + +$$

Weil nun $D = o$, $E = o$, u. s. f. f., so wird

$$\frac{B\alpha + C - 2\,C = o}{B\alpha = C}$$

Nun

Nun auch $B\beta + C\alpha = o$

$B\beta + B\alpha^2 = o$

$\beta = -\alpha^2$.

Ferner $B\gamma + C\beta = o$

$B\gamma + B\alpha\beta = o$

$\gamma = -\alpha\beta = +\alpha^3$, u. s. f.

Daraus wird $S' : S = 1 + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + + : 1$.

$= 1 + \alpha y - \alpha^2 y^2 + \alpha^3 y^3 - + . = 1 + \frac{\alpha y}{1+\alpha y} = \frac{1+2\alpha y}{1+\alpha y}$.

Weil $\alpha = \frac{C}{B}$, und $B = 1 - C$,

so wird $\alpha = \frac{C}{1-C}$.

## 37.

Ist die wirkliche Sterblichkeit *kleiner* als die tabellarische, so ist C eine *negative Grösse*, und zugleich ein *eigentlicher Bruch*. Denn weil

$y' - y = Cy\ (y - a)$, so ist

$C = \frac{y'-y}{y(y-a)}$. Nun ist $y' > y$ und $y < a$, folglich der Zähler *bejahend*, und der Nenner *verneinend*.

Also $C = -\frac{y'-y}{(a-y)y}$, also eine negative Grösse.

Ferner C muss eine *beständige* Grösse seyn, aber nur in Beziehung auf $a$, und abhängig von $a$. Es muss so genommen werden, dass im Fall statt $a$, die Anfangszahl $m\,a$ wird, also auch statt $y'$, $y$, die Zahlen $my'$, $my$ gesetzet werden, dennoch die Gleichung $C = -\frac{y'-y}{(a-y)y}$

ſtatt finde. Aber wenn dieſe Subſtitution geſchieht, ſo bekommt man

$M = -\frac{m(y'-y)}{m^2(a-y)} = -\frac{y'-y}{m(a-y)}$; in dieſem Fall muſs alſo $M = \frac{C}{m}$ werden. Daher iſt C eine ſolche Gröſse, welche $a$ im Diviſor haben muſs, wenn der Zähler bey jeder Anfangszahl derſelbe bleiben ſoll. Man ſchreibe alſo $C = -\frac{n}{a}$ wo $\frac{n}{a}$ poſitiv iſt, ſo wird

$$\frac{n}{a} = \frac{y'-y}{(a-y)y}.$$

Nun iſt y eine ganze Zahl, wenn $a$ eine ganze Zahl iſt, von der gehörigen Gröſse, und man kann ſie ſo groſs nehmen, als man will. Auch iſt $y'-y < a-y$, weil $y'$ immer kleiner als $a$, doch gröſſer als $y$ iſt. Alſo auch $(a-y)y > y'-y$. Daher auch in dieſem Fall $-\frac{n}{a} = C$ jedesmal ein *eigentlicher Bruch* iſt.

## 38.

Wenn $a = 1$; ſo iſt $C = -n$. Alſo in §. 36; $\alpha = -\frac{n}{1+n}$, und dann iſt auch $y$ ein eigentlicher Bruch. Das Verhältniſs $S' : S = 1+\alpha y-\alpha^2y^2+- : 1 = 1+\frac{\alpha y}{1+\alpha y} : 1 = 1+2\alpha y : 1+\alpha y = n+1-2ny : n+1-ny$. Wenn $y = 0$, ſo iſt dieſs Verhältniſs die Gleichheit, aber im Anfang, wenn $y = 1$, wird ſolches $= 1-n : 1$.

Hier

Hier ist die Anfangszahl $a = 1$; wird sie aber beybehalten wie sie in den vorkommenden Fällen ist, so kommt anstatt y, der Bruch $\frac{y}{a}$.

Nun ist aber nach der Natur der Sache nicht möglich, weder dass $1 - n = 0$, noch dass es verneinend sey. Die *wirkliche* Sterblichkeit kann in Vergleichung mit der tabellarischen nicht verschwinden, oder, wenn man dies auch für den ersten Anfang der Gesellschaft annehmen wollte, doch nicht *verneinend* seyn. Folglich muss *n*, welches positiv ist nach §. 37, auch zugleich ein *eigentlicher Bruch* seyn. Also auch, weil $n = \frac{a(y'-y)}{(a-y)y}$ (§. 37.) $= \frac{a}{a-y} \cdot \frac{y'-y}{y}$, der Factor $\frac{y'-y}{y} = \frac{y'}{y} - 1$ kleiner als die Einheit seyn, und y′ kleiner als 2 y. Auch ist $n \cdot \frac{a-y}{a} = \frac{y'-y}{y}$, also weil *n* ein eigentlicher Bruch ist, $\frac{y'}{y} - 1$ kleiner als $1 - \frac{y}{a}$. Dies ist eine Folge der im §. 31. angenommenen *Hypothese*, und zwar bey solchen Gesellschaften, worin die Sterblichkeit kleiner ist, als die gemeine. Sie schliesst die Fälle aus, in denen *y′* zweymal so gross wird als *y* nach den Tabellen. Das ist ein Beweis, dass sie nicht allgemein genug ist; aber kein Beweis, dass sie nicht für die wirckliche Erfahrung allgemein genug sey.



Digitized by Google

## 39.

Wenn die *wirkliche* Sterblichkeit gröſser iſt, als die *tabellariſche*, ſo iſt $C = \frac{y - y'}{(a-y)y}$ *poſitiv*, weil hier $y > y'$ iſt, folglich auch $C = n$ poſitiv, für $a = 1$. §. 37. Daher $\alpha = \frac{n}{1-n}$, und $\alpha y = \frac{n}{1-n} \cdot y$, und $S' : S = 1 + \alpha y - \alpha^2 y^2 + \alpha^3 y^3 - +$ in infinitum,

$$= 1 + \frac{\left(\frac{n}{1-n} y\right)^{\infty} - \frac{n}{1-n} y}{-\frac{n}{1-n} y - 1}.$$

Allein weil die wirkliche Sterblichkeit nicht unendlich vielmal gröſser ſeyn kann als die tabellariſche, ſo muſs auch hier $\alpha y$ ein eigentlicher Bruch ſeyn. Dann wird

$$S' : S = 1 + \frac{\frac{n}{1-n} \cdot y}{\frac{n}{1-n} y + 1} : 1 = \frac{1 - n + 2ny}{1 - n + ny} : 1$$

$= 2ny + 1 - n : ny + 1 - n$. Das iſt, beyde ſind gleich, wenn $y = 0$, und wenn $y = 1$, ſo iſt $S' : S = n + 1 : 1$.

## 40.

Wo die Differenz $y' - y$ ein *Gröſstes iſt*, da wird d. $(y - a)\, y = 0$, §. 33. alſo $2y\,dy = a\,dy$, und $y = \frac{1}{2} a$; das iſt, wo die Hälfte der anfänglichen Zahl noch übrig iſt, die Hälfte alſo verſtorben iſt, oder, nach Ablauf des *wahrſcheinlichen Alters*.

41. Es

## 41.

Es kommt also darauf an, ob die Erfahrung die Gröſse $n = a.\frac{y'-y}{(a-y)y} = a.\frac{(z-z')}{(a-z)z}$, (weil $a-y = z$, und $y'-y = z-z'$,) als *beſtändig*, oder doch nahe so angebe. Wenn das letzte nur Statt findet, und zwar im Durchschnitt, so kann man den gefundenen Werth von *n* mit eben so vieler Zuverläſsigkeit zum Grunde legen, und darnach rechnen, als man die Mortalitäts-Tafeln gebraucht.

Ist das Verhältniſs der *wirklich Gestorbenen zu den Erwarteten* gegeben, so sey $z' = \nu z$. Dieſs Verhältniſs ist aber veränderlich, nachdem die Zeit, worinn sie gestorben sind, und also z, oder die Zahl der Todten nach den Tabellen sich ändert. Alsdenn bekommt man

$$n = a.\frac{1-\nu}{a-z}. = \frac{1-\nu}{y:a}.$$

## 42.

Da *n* eine *beſtändige* Gröſse ist, wenigstens seyn soll nach der Hypotheſe, uud zwar so eine, welche im Durchschnitt als die richtige genommen werden kann, so läſst sie sich erhalten, wenn aus mehrern einzelnen Werthen von ihr der Mittelwerth gesucht wird. Dagegen ist $\nu$, das *Verhältniſs der wirklichen* Todten zu *den berechneten* veränderlich so wohl, wenn das *Alter* der Personen, als wenn die *Zeit des Absterbens* verschieden ist.

Das Verfahren ist also mislich, wenn $y$ als von derselben Gröfse angenommen wird, in den Beyspielen, woraus man die Werthe von $n$ sucht, sobald entweder das Alter oder die Zeit nicht dieselben sind. Man kann und mufs in dieser Materie die Sachen im Durchschnitt rechnen, im Bausch und Bogen; aber doch mit Vorsichtigkeit. Einzelne Beobachtungen in kleinen Zahlen, z. B. die Fälle, wo gar keiner aus der anfänglichen Zahl in einer Zeit gestorben ist, können so allein zu nichts gebraucht werden. Es sind nicht einzelne Fälle, es sind Haufen von Fällen, die uns hier als Beobachtungen dienen, denn man sucht nicht *allgemeine* Gröfsen, sondern *Mittel-Gröfsen*. Allein diese Sammlungen von Fällen müssen gleichartige Fälle enthalten. Wenn das Absterben der ersten 1270 Ehefrauen bey der Calenbergischen Gesellschaft von halben Jahr zu halben Jahr, oder nur von Jahr zu Jahr verzeichnet würde, so könnten über 300 Werthe von $n$ daraus berechnet werden, so dafs ein Mittel aus ihnen als die Normal-Gröfse bey Ehefrauen in einem Wittwen-Institut, wenigstens in Deutschland, angenommen werden könnte. Und diese Zahl würde wie ich glaube, gleiche und wohl gröfsere Zuverläfsigkeit haben, als irgend eine unserer besten Mortalitäts-Tafeln. Ein Gebrauch, der wichtig genug ist, um solche Verzeichnisse zu wünschen.

Ich glaube indessen, man könne mit den obigen Erfahrungen schon ziemlich weit kommen. Zuerst sondere man

man diejenigen Fälle ab, wo die Zahl der Personen nahe an 30 und darüber ist, das Alter der Personen gleich ist, oder doch in demselben Quinquennio steht, und die Zeit des Absterbens dieselbe ist. Der mittlere Werth aus diesen Werthen von *n* wird der Wahrheit nahe kommen. Nachher kann man auch die von *gleichem Alter*, obgleich die *Zeit* verschieden ist, und dann die, bey denen die Zeit dieselbe, das Alter aber verschieden ist, zu Hülfe nehmen. Treffen die letztern Resultate mit den ersten zusammen, so sind es bestätigende Gründe, so ferne sie aber abweichen, können sie an Gültigkeit den erstern nicht gleich gesetzet werden.

## 43.

1) Bey Personen vom Alter *20 - 25* Jahr beym Eintritt, wird

| aus Tafel, | der Werth von *v*; | und der von *n*. |
|---|---|---|
| 1 | 1, 37<br>Es sind mehr gestorben als erwartet worden. | — 0, 457 |
| 7 | 0, 44 | + 0, 959 |
| 10 | 0, 60 | + 0, 384 |
| 12 | 0, 00 | + 1, 127 |
| 13 | 1, 20 | — 0, 224 |
| 18 | 0, 60 | + 0, 626 |

Der mittlere Werth von *n* hieraus ist $= \frac{2,105}{6} = 0,35$

2) Alter *25—30 Jahr.*

| aus Taf. | *v.* | *n.* | aus Taf. | *v.* | *n.* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,65 | + 0,44 | 15 | 1,12 | — 0,136 |
| 2 | 1,10 | — 0,127 | 16 | 1,82 | — 0,918 |
| 3 | 1,00 | 0,00 | 17 | 1,00 | 0,000 |
| 5 | 1,64 | — 0,807 | 18 | 0,00 | + 1,097 |
| 7 | 0,56 | + 0,532 | 19 | 1,22 | — 0,245 |
| 8 | 0,84 | + 0,193 | 20 | 0,46 | + 0,586 |
| 9 | 0,61 | + 0,474 | 21 | 0,00 | + 1,076 |
| 10 | 0,50 | + 0,588 | 22 | 0,00 | + 1,068 |
| 11 | 0,31 | + 0,817 | 23 | 0,00 | + 1,079 |
| 12 | 1,25 | — 0,281 | | | |
| 13 | 1,31 | — 0,357 | | | |

Der mittlere Werth hieraus ist $= \frac{5,079}{20} = 0,254$

3) *Das Alter 30—35 Jahr.*

| aus Taf. | *v.* | *n.* | aus Taf. | *v.* | *n.* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,66 | + 0,451 | 13 | 1,37 | — 0,434 |
| 2 | 0,94 | + 0,080 | 14 | 0,43 | + 0,672 |
| 6 | 0,79 | + 0,266 | 16 | 0,54 | + 0,531 |
| 7 | 0,86 | + 0,177 | 17 | 0,35 | + 0,739 |
| 8 | 0,86 | + 0,174 | 18 | 0,27 | + 0,848 |
| 9 | 1,35 | — 0,448 | 19 | 0,67 | + 0,367 |
| 10 | 1,14 | — 0,145 | 20 | 1,27 | — 0,297 |
| 11 | 1,02 | — 0,025 | 23 | 0,5 | + 0,535 |
| 12 | 1,54 | — 0,644 | | | |

Hieraus das Mittel $= + \frac{2,847}{17} = 0,17.$

4) *Das*

Digitized by Google

4) *Das Alter 35 — 40 Jahr.*

| aus Taf. | *v.* | *n.* | aus Taf. | *v.* | *n.* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,71 | 0,557 | 11 | 0,91 | 0,112 |
| 5 | 0,47 | 0,680 | 13 | 1,11 | — 0,132 |
| 7 | 0,40 | 0,782 | 21 | 0,42 | 0,642 |
| 8 | 0,92 | 0,103 | 22 | 0,46 | 0,592 |
| 9 | 0,64 | 0,843 | 23 | 0,00 | 1,085 |
| 10 | 0,48 | 0,650 | 26 | 1,43 | — 0,455 |

Das Mittel ist $= + \frac{5,459}{12} = 0,455.$

5) *Alter 40 — 45 Jahr.*

Hier sind schon Beyspiele mitgenommen, wo die Zahl der Personen nur gegen 20 gewesen ist. Es fehlte an andern.

| aus Taf. | *v.* | *n.* | aus Taf. | *v.* | *n.* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,60 | 0,626 | 8 | 0,95 | 0,069 |
| 2 | 0,55 | 0,562 | 9 | 0,32 | 0,960 |
| 3 | 0,42 | 0,876 | 10 | 0,59 | 0,541 |
| 4 | 0,70 | 0,439 | 18 | 0,42 | 0,682 |
| 6 | 0,81 | 0,270 | 20 | 0,44 | 0,642 |
| 7 | 0,44 | 0,781 | | | |

Das Mittel hieraus ist, $n = + \frac{6,448}{11} = 0,586.$

6) *Alter*

Digitized by Google

6) *Alter von 45—50 Jahr.*

Hier sind Fälle mitgenommen, wo die Zahl der Personen nur 9 bis 10 und darüber gewesen ist

| aus Taf. | *v.* | *n.* | aus Taf. | *v.* | *n.* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,66 | 0,594 | 8 | 0,00 | 1,550 |
| 2 | 0,68 | 0,543 | 9 | 0,24 | 1,100 |
| 3 | 0,21 | 1,240 | 10 | 0,66 | 0,486 |
| 4 | 0,22 | 1,265 | 11 | 0,48 | 0,673 |
| 6 | 0,65 | 0,542 | 12 | 0,34 | 0,896 |
| 7 | 0,34 | 1,009 | | | |

Das Mittel hieraus für $n$ ist $= \frac{9,899}{11} = 0,9$.

7) *Alter von 50—60 Jahr.*

Aus Taf. 1. ist $v = 0,71$; $n = 0,649$;

— — 2.— $v = 0,36$; $n = 0,936$;

— — 3.— $v = 1,13$; $n = -0,264$;

— — 5.— $v = 0,6$; $n = 0,800$.

Dieſs giebt zum mittlern Werth $n = +\frac{2,121}{4} = 0,53$.

## 44.

Der *mittlere Werth von n aus allen dieſen berechneten 81 Fällen* ist $\pm 0,42$.

Sondert man aber die vom Alter bis 35 Jahr, von den ältern ab, weil der Unterſchied in jeder Claſſe beſonders, merklich ist, ſo wird

für die *unter 35 jährigen*, $n = 0,23$.

für die *über 35 jährigen*, $n = 0,63$.

Theilet man ſie dagegen ab in *45 jährige*, und *darunter*, und in *ältere*, ſo wird $n$ für jene $= 0,33$, und für dieſe $= 0,8$.

Es

Digitized by Google

Es verdienet hiebey das bemerket zu werden. Da der mittlere Werth von *n* nirgends so gros ist, als die Einheit, (denn von einzelnen Fällen ist die Frage nicht, und auch diese kommen wenig vor,) so empfiehlt sich dadurch die obige Hypothese (nach §. 37.) als eine solche, die den Erfahrungen anpassend ist.

## 45.

Mit den gefundenen Werthen von *n* vergleiche man nun noch diejenigen, welche man findet, wenn der Unterschied am Alter, oder an der Zeit des Absterbens, oder auch beydes bey Seite gesetzet wird. Ich habe oben schon erinnert, diese Resultate können nur zur Prüfung dienen, sie sind nicht so zuverläsig, als die vorhergehenden.

Man nehme also alle zusammen, die in Einer der obigen Tabellen vorkommen, so erhält man folgende Werthe von *n*

| Taf. | n. | T. | n. | T. | n. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0, 454 | 11 | 0, 365 | 21 | 0, 295 |
| 2 | 0, 381 | 12 | 0, 214 | 22 | 0, 542 |
| 3 | 0, 353 | 13 | — 0, 047 | 23 | 0, 863 |
| 4 | 0, 270 | 14 | 0, 555 | 24 | — 0, 131 |
| 5 | 0, 359 | 15 | 0, 299 | 25 | 0, 880 |
| 6 | 0, 388 | 16 | 0, 457 | 26 | 0, 502 |
| 7 | 0, 567 | 17 | 0, 115 | 27 | 0, 332 |
| 8 | 0, 162 | 18 | 0, 649 | 28 | — 0, 103 |
| 9 | 0, 366 | 19 | 0, 400 | | |
| 10 | 0, 368 | 20 | 0, 507 | | |

Der mittlere Werth aus diesen 28 ist $n = \frac{0,36}{28} = 0,37$

46. Die

## 46.

Die Werthe von *n*, wenn auf die Verschiedenheit der Zeit des Absterbens nicht gesehen, das Alter beym Anfang aber bey allen gleich gesetzet wird, sind folgende.

| Alter | n. | Alter | n. |
|---|---|---|---|
| 15—20 | 0,088 | 40—45 | 0, 598 |
| 20—25 | —0,089 | 45—50 | 0, 718 |
| 25—30 | 0,243 | 50—55 | 0, 537 |
| 30—35 | 0,217 | 55—60 | 0, 528 |
| 35—40 | 0,429 | 60—70+ | 0, 817 |

Hier muss aber noch für die weggelassenen nach §. 10. hinzugesetzet werden ein Werth von $n = 0,5$.

Das Mittel aus diesen 11 Werthen ist

$$= \frac{3,986}{11} = 0,362.$$

Sondert man die *unter 35 jährigen* ab von den *ältern*; so ist *n* für die *erstern*, wenn man die Hälfte von den weggelassenen nur dahin rechnet; $= 0,128$.

Für die letztern ist solches $= 0,541$.

Theilet man sie in die *unter 45 jährigen*, und in die ältern, so ist *n* für jene $= 0,25$;

für diese $= 0,63$.

## 47.

Endlich noch alle zusammen genommen als ein Haufen von gleichem Alter beym im Anfang, und in gleicher Zeit abgestorbenen, (nach den Zahlen in §. 7.) so ist $n = 0,375$.

48. *Als*

Digitized by Google

## 48.

*Als ein Resultat aus diesen glaube ich annehmen zu können, es lasse sich für Ehefrauen, deren Männer in Wittwencassen einsetzen, im Durchschnitt annehmen*

$$n = 0,4.$$

Für die *unter 35 jährigen* insonderheit aber $= 0,2$, und für die *über 35 jährigen* $n = 0,6$.

Oder auch für alle *unter 45 jährige* insonderheit

$$= 0,3$$

für alle ältere $= 0,8$.

## 49.

Für den Werth von *n* bey den *Ehemännern* ist nur die eine Tabelle 31. (§. 11.) da, welche aber ohne in Verbindung mit der 32sten nicht gebrauchet werden kann.

Die Werthe von *n*, welche daraus folgen, sind diese:

| Alter | n | Alter | n |
|---|---|---|---|
| 20—30 | 0, 382 | 50—55 | 0, 145 |
| 30—35 | 0, 355 | 55—60 | — 0, 061 |
| 35—40 | 0, 498 | 60—65 | — 0, 064 |
| 40—45 | 0, 416 | 65—70 | 0, 386 |
| 45—50 | 0, 133 | 70—75 | 0, 48 |

Der *mittlere Werth aus allen* ist, $n = 0,27$.

Für die *unter 45 jährigen* insonderheit wird $n = 0,41$.

Für die ältern $= 0,17$.

Das Mittel bey den Frauen in §. 44. war $n = 0,42$. Nimmt man aus diesem und dem gegenwärtigen $n = 0,27$,

von

von neuen das Mittel, so wird n = 0, 34. *Dieß kann als das Mittel für beyde Geschlechter vermischt angenommen werden.*

Das Alter ist aber hier das Eintritts-Alter. Der gefundene Werth gehört noch zu den vorhergehenden.

Die folgenden Tabellen geben solche Werthe nicht, weil man das Alter nicht hat, worinnen die Personen eingetreten sind, sondern nur dasjenige, in welchem ihr Absterben erfolgt ist.

## 50.

Aus der 33sten Tafel erhält man einen Werth von n = 0, 307. Diesen kann man noch den obigen zuzählen. Allein die aus der 34. 35 und 36sten Tafel sind eigentlich nicht damit zu vergleichen, weil es hier nicht das Alter beym Eintritt ist, aus dem der Abgang berechnet wird. Nehmen wirs indessen so an, so erhält man folgende Werthe:

1) Aus der 34sten Tafel n = 0, 506.

In dem obigen Ausdruck $n = \frac{1-\nu}{y:a}$, kann $a = 1$ gesetzet werden. Dann muss aber $\frac{z}{a}$ aus der Mortalitäts-Tafel gesucht werden, nach der man die erwarteten Todten berechnet hat.

2) Die Werthe von *n* aus der 35 und 36sten Tafel sind folgende. Es waren die Einsätze der Interessenten

der

der Gesellschaft nach der Londoner Mortalitäts-Tabelle des *Simpsons* berechnet. Auch aufserdem bestund wohl der gröfste Theil derselben aus Personen, die in London wohnten. Daher auch ohne Zweifel die Londoner Tabelle hier als die gemeine anzusehen ist.

| *Aus der 35sten Tafel.* | | | *Aus der 36sten Tafel.* | |
|---|---|---|---|---|
| Alter | Werthe von *n* in Beziehung auf | | *n* in Beziehung auf | |
| | die *Londoner* | auf *Süfsm. Tafel.* | die *Londoner T.* | auf die *Süfsmilch. Tafel.* |
| 10—20 | — — | — — | 0, 240 | —0, 146 |
| 20—30 | 0, 715 | 0, 425 | 0, 751 | +0, 294 |
| 30—40 | 0, 530 | 0, 060 | 0, 828 | +0, 302 |
| 40—50 | 0, 710 | —0, 076 | 0, 649 | +0, 057 |
| 50 60 | 0, 546 | +0, 200 | 0, 623 | +0, 240 |
| 60—70 | 0, 518 | —0, 087 | 0, 035 | —0, 142 |
| 20—70 | 0, 428 | +0, 182 | | |

Nimmt man den mittlern Werth aus den Zahlen für die ganze Gesellschaft auf einmal, und zwar aus den Tafeln *34 und 35*, wo man solche hat, so ist aus diesen beyden Fällen n = 0, 34 in Hinsicht auf *Halleys*, oder was hier einerley ist, *Süfsmilchs* Tafel.

Der *mittlere Werth* aus *den eilf* einzelnen Fällen in Taf. 34 und 35. ist in Beziehung auf die Süfsmilchische Tabelle nur = 0, 102.

Dagegen in Beziehung auf die Londoner = 0, 464.

## 51.

Die Mortalitäts-Tabelle des *Deparcieux* kann aus vorgedachten Gründen nicht hieher gezogen werden. Will man sie so ansehen, als wenn die *Neugebohrnen* alle zugleich als ausgesuchte Kinder in die Gesellschaft gebracht worden, und dann den Werth von $n$, in Beziehung auf die Süssmilchische Tabelle, in so vielen einzelnen Fällen berechnen, so findet sich der mittlere Werth nahe genug so gross, als oben aus den Calenbergischen Erfahrungen in §. 48; nämlich 0, 4. Allein wenn man von einer andern Zahl der Lebenden anfängt, so zeiget sich, was auch in jenen Exempeln sich findet, dass in den höhern Jahren die Zahl der Verstorbenen nach *Deparcieux* sich nicht genug der Zahl nach *Süssmilch* nähert, um $n$ niemals gröfser werden zu lassen als die Einheit. Und da diese Gröfse in den meisten Beyspielen immer wächset, je länger die Zeit des Absterbens genommen wird, so würde diese Tabelle mehr der Hypothese entgegen als mit ihr übereinstimmend seyn, wenn jene ihrer Natur nach auf eine solche Tabelle so gebraucht, anpassend seyn müsste. Das soll sie aber nicht. Es soll die Gröfse $n$ nur unter der Bedingung beständig seyn, dass $\nu$ das Verhältniss der wirklich Gestorbenen zu den tabellarischen ausdrückt, aus denselben Personen von gleichem Alter bey dem Anfang der Gesellschaft nach derselben Zeit. Es ist ein anders wenn die von gleichem Alter in der Gesellschaft schon sehr verschiedene

schiedene Jahre darinn gewesen sind. Die Tafel des *Deparcieux* giebt die Zahl *y* bey dem höhern Alter zu klein an. Das heifst nicht, sie giebt die *Sterblichkeit* zu klein an. Die Sterblichkeit kann überhaupt in der ausgesuchten Gesellschaft so geringe seyn als man will, demohngeachtet kann *n* eine beständige Gröfse bleiben. Es kommt nur darauf an, dafs die Sterblichkeit sich der tabellarischen nähere, nicht aber sich von dieser entferne. So findet mans nicht, wenn die Tabelle des *Deparcieux*, als von einer ausgesuchten Gesellschaft, mit der Süfsmilchischen, als von der allgemeinen Gesellschaft, verglichen wird.

## 52.

Ist der Werth von *n* ausgemacht, so findet aus §. 40. die Gleichung statt.

$$y' = (n+1)\,y - \frac{n\,y^2}{a}.$$

Daraus kann eine Tabelle für *die Wahrscheinlichkeit des Lebens einer jetzo gesunden Person von einem bestimmten Alter* gemacht werden. Aber die Zahl der Lebenden, $y'$, hängt in Hinsicht ihres letzten Theils $\frac{n\,y^2}{a}$, von der Anfangszahl *a*, ab. Daher läfst sich dieselbe Tabelle nicht für Personen von einem andern Alter gebrauchen, ohne sie gehörig abzuändern. So eine allgemeine Mortalitäts-Tafel, als des *Deparcieux* seine ist, kann hiebey nicht statt finden.

## Dritter Abſchnitt.

### *Von dem Einfluſs, den die Abweichung der Sterblichkeit in ausgeſuchten Geſellſchaften auf die Werthe der Leibrenten und Wittwenpenſionen hat.*

### 53.

*Aufgabe* 1. *Aus dem Werth einer Leibrente nach den Tabellen, den Werth derſelben zu finden nach der wirklichen Sterblichkeit.*

Der Werth der Leibrente für das Alter *a* ſey $\lambda\overline{a}$; der Werth der Verbindungsrente für zwo Perſonen vom Alter *a*, wiederum $\lambda\overline{aa}$. Der Werth der Leibrente nach der wirklichen Sterblichkeit ſey $\lambda'\overline{a}$, von jenem Ausdruck durch den oben zur rechten Hand angeſetzten Strich unterſchieden.

Es ſey *n* wiederum die beſtändige vorher geſuchte Gröſse in der Gleichung $y' = (n+1)y - n\frac{y^2}{a}$, worin *a* die Zahl der Lebenden nach den Tabellen im Alter *a* iſt, welche in der *Einleitung* ſonſt durch A bezeichnet iſt. Alsdenn iſt $\lambda'\overline{a} = \lambda\overline{a} + n.(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa})$.

Dieſs wird leicht ſo eingeſehen.

Da $\lambda\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{{}^{1}\overline{A}}{r} + \frac{{}^{2}\overline{A}}{r^2} + + \frac{{}^{x}\overline{A}}{r^x}\right)$ (*Einleit.* Cap. 2. v. Leibrent. §. 39.), wo ${}^{1}\overline{A}$, ${}^{2}\overline{A}$, die Zahlen der Lebenden in den Tabellen ſind, welche im Allgemeinen durch *y* in der obigen Gleichung bezeichnet werden, ſo

so setze man statt jeder derselben den Werth der zugehörigen Zahl y'. Alsdenn ist

$$\lambda'\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{(n+1)^{\overline{1}}A}{r} + \frac{(n+1)^{\overline{2}}A}{r^2} + + +\right)$$

$$- \frac{1}{A}\left(\frac{n^{\overline{1}}A.\,^{\overline{1}}A}{A.\,r.} + \frac{n.^{\overline{2}}A.\,^{\overline{2}}A}{A.\,r^2} + +\right)$$

$= (n+1)\,\lambda\overline{a} - n\,\lambda\overline{aa}$. (*Einleit.* §. 39. und §. 126.)
$= \lambda\overline{a} + n\,(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa})$.

## 54.

*Ex.* 1. Es sey das Alter 35 Jahr, und $n = 0,4$. nach §. 48, so ist, nach dem 4 pro Cent-Fuss $\lambda\overline{a} = 14,1175$ (Tab. XVI.) und $\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa} = 3,2599$. (Tab. XXVII.) Daher $\lambda'\overline{a} = 14,1175 + 1,3040 = 15,4215$. Der Ueberschuss von $\lambda'\overline{a}$ über $\lambda\overline{a}$ beträgt, in Procenten berechnet, nahe an 10 Procent der tabellarischen Rente mehr, oder auf jede jährliche Hebung von 10, nahe an 13 mehr.

Wird $n = 0,3$ gesetzet, so ist $n\,(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa}) = 0,9779$, und $\lambda'\overline{a} = 15,0954$. Der Unterschied ist nahe an 7 Procent des tabellarischen baaren Werths der Rente, und auf jede der jährlichen Hebungen 10, um 9,8 mehr.

*Ex.* 2. Es sey das Alter 45 Jahr, so ist nach demselben Zinsenfuss $\lambda\overline{a} = 12,0108$ und $\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa} = 3,1745$. Daher wird $\lambda'\overline{45}$, (wenn $n = 0,4$), $= 12,0108 + 1,2698 = 13,2806$, das ist, um nahe an $10^{\frac{1}{2}}$ p. C. mehr als $\lambda\overline{45}$, oder

oder auf jede jährliche Hebung von 10, nahe an 12, 7 mehr.

Wenn $n = 0,3$, wird $\lambda' \overline{45} = 12,0108 + 0,9523 = 12,9631$, das ist nahe 8 p. C. mehr.

## 55.

*Zusatz* 1. Weil $\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa}$, der Werth der Rente auf das Ueberleben einer Person über eine andere von gleichem Alter, immer einigen positiven Werth hat, wenn $n$ positiv ist, so ist in jedem Fall, die Leibrente nach der wirklichen Sterblichkeit gröfser als nach der tabellarischen, und dieser Unterschied ist nicht unerheblich. Dieser nimmt zu (nach der XXVIIsten Tabelle) vom 15 bis 35sten Jahr, an sich, und auch im Verhältnifs gegen die tabellarische Rente selbst. Von da an nimmt der Unterschied an sich ab, allein in Verhältnifs auf die gewöhnliche tabellarische Leibrente, also in Procenten nach dieser letztern berechnet, wird er bey dem höhern Alter immer gröfser.

## 56.

*Zusatz* 2. Nimmt man statt der Werthe der Renten die Gröfsen für die mittlere *Dauer* des einfachen Lebens und des Zusammenlebens, so erhält man auf dieselbe Art in ähnlichen Ausdrücken, auch die *mittlere Lebensdauer* nach der wirklichen Sterblichkeit, oder

$$E' \overline{a} = E \overline{a} + n. (E. \overline{a} - C. \overline{aa}),$$

wo

wo $E\overline{a}$ die Dauer des einzelnen Lebens nach den Tabellen, und $C\overline{aa}$ die Verbindungsdauer ist. Dasselbige läßt sich bey allen folgenden Aufgaben erinnern. Darum ist es überflüssig, dieselbigen Sätze für *die Dauer* noch besonders auszudrücken.

## 57.

*Aufgabe 2. Den Werth der Verbindungs-Rente von zwo Personen nach der wirklichen Sterblichkeit zu finden.*

Wenn die Zahl *n bey beyden Personen dieselbige* ist, das ist, die wirkliche Sterblichkeit bey beyden Personen nach derselben Gleichung von der tabellarischen abweicht.

*Auflösung.* In diesem Fall ist ($\lambda'\overline{ab}$ für das Zeichen der wirklichen Verbindungsrente genommen),

$$\lambda'\overline{ab} = (1+n)^2.\ \lambda\overline{ab} - n.(n+1)\,\lambda\overline{aa.b} - n.(n+1)\,\lambda\overline{abb} + n\,n\,\lambda\overline{aa.bb}.$$

*Beweis.* In einem allgemeinen Gliede der Reihe

$$\text{für } \lambda\overline{ab} = \frac{1}{A\,B}\cdot\left(\frac{{}^{1}\overline{A}\ {}^{1}\overline{B}}{r} + + \frac{{}^{x}\overline{A}\ {}^{x}\overline{B}}{r^x}\right)$$

(§. 126. der *Einl.*) setze man statt ${}^{x}\overline{A}$, aus der obigen Gleichung, $(n+1)\,{}^{x}\overline{A} - n\frac{{}^{x}\overline{A^2}}{A}$, und statt ${}^{x}\overline{B}$, ebenfalls $(n+1)\,{}^{x}\overline{B} - n\frac{{}^{x}\overline{B^2}}{B}$, so erhält man für ein unbe-



Digitized by Google

ſtimmtes Jahr $x$, anſtatt $\frac{{}^{x}A.\,{}^{x}B}{A.\,B.\,r^{x}}$, folgendes:

$$\frac{(n+1)^2.\,{}^{x}A.\,{}^{x}B}{A\,B\,r^{x}} - n.\,(n+1)\,\frac{({}^{x}A)^2\,({}^{x}B)}{A\,A.\,B.\,r^{x}}$$

$$- n.(n+1)\,\frac{{}^{x}A\,({}^{x}B)^2}{A.\,B\,B.\,r^{x}} + n^2.\,\frac{({}^{x}A)^2\,({}^{x}B)^2}{A\,A.\,B\,B.\,r^{x}}.$$

Dieſe Theile aus allen Jahren zuſammen genommen, geben folgende Verbindungsrenten:

$$\frac{(n+1)^2}{A\,B}\cdot\left(\frac{{}^{1}A.\,{}^{1}B}{r} + \frac{{}^{2}A.\,{}^{2}B}{r^2} + +\,\frac{{}^{x}A.\,{}^{x}B}{r^{x}}\right) =$$

$(n+1)^2.\,\lambda\,\overline{a\,b}.$

$$-\frac{n.(n+1)}{A\,A.\,B}\cdot\left(\frac{{}^{1}A.\,{}^{1}A.\,{}^{1}B}{r^1} + \frac{{}^{2}A.\,{}^{2}A.\,{}^{2}B}{r^2} + +\right.$$

$$\left.\frac{{}^{x}A.\,{}^{x}A.\,{}^{x}B}{r^{x}}\right) = -\,n.\,(n+1)\,\lambda\,\overline{a\,a\,b},$$ für *drey* Perſonen (§. 150. *Einleit.*)

$$-\frac{n.(n+1)}{A.\,B\,B}\cdot\left(\frac{{}^{1}A.\,{}^{1}B.\,{}^{1}B}{r} + \frac{{}^{2}A\,{}^{2}B\,{}^{2}B}{r^2} + +\right.$$

$$\left.\frac{{}^{x}A\,{}^{x}B\,{}^{x}B}{r^{x}}\right) = -\,n\,(n+1)\,\lambda\,\overline{a\,b\,b}.$$ Und

$$+\frac{n^2}{A\,A.\,B\,B}\cdot\left(\frac{{}^{1}A.\,{}^{1}A.\,{}^{1}B\,{}^{1}B}{r} + \frac{{}^{2}A\,{}^{2}A.\,{}^{2}B\,{}^{2}B}{r^2}\right.$$

$$\left. + +\,\frac{{}^{x}A\,{}^{x}A.\,{}^{x}B.\,{}^{x}B}{r^{x}}\right) = +\,n^2.\,\lambda\,\overline{a\,a.\,b\,b}$$

das iſt eine Rente für *vier* verbundene Perſonen. Folglich

$\lambda'\,\overline{a\,b}$

Digitized by Google

$\lambda' \overline{ab} = (n+1)^2 \lambda \overline{ab} - n.(n+1) \lambda \overline{aab} - n.(n+1) \lambda \overline{abb} + n^2 . \lambda \overline{aa.bb}$.

## 58.

*Zusatz* 1. Daraus wird auch

$\lambda' \overline{ab} = \lambda \overline{ab} + n^2 (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aa.b})$
$+ n (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{ua.b}) + n (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb})$
$- n^2 (\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aa.bb})$.
$= \lambda \overline{ab} + n.(n+1) (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aa.b})$
$+ n (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb}) - n^2 (\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aa.bb})$.

In diesem Ausdruck sind die folgenden Glieder lauter Renten auf die Ueberdauer einer Verbindung von einer gewissen Zahl von Personen, nachdem die Verbindung aus diesen und noch einer Person mehr aufgehöret hat. Es sind lauter positive Grösen.

## 59.

*Zusatz* 2. Wenn die Verbindungsrente $\lambda \overline{ab}$ angesehen wird als eine einfache Leibrente für das Mittelalter $m$, also $\lambda \overline{ab} = \lambda \overline{m}$, so kann die Verbindungsrente für drey Personen als eine für zwo, (nach *Einleit.* §. 162.) das ist, $\lambda \overline{a.ab} = \lambda \overline{am}$ ohne erheblichen Fehler angenommen werden.

Ferner, wenn $\lambda \overline{abb} = \lambda \overline{\mu}$, das ist, einer einfachen Leibrente für das Alter $\mu$, so kann $\lambda \overline{a.abb} = \lambda \overline{a\mu}$ gesetzet werden.

Alsdenn ist $\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{a.ab} = \lambda \overline{m} - \lambda \overline{am}$, das ist, der Werth der Rente auf das *Ueberleben* der Person vom

Alter $m$, über die vom Alter $a$, oder der baare Werth der Wittwenrente, wenn $m$ das Alter der Ehefrau, und $a$ das des Mannes ist. (*Einl.* §. 127.)

Ferner ist $\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{abb} = \lambda\overline{m} - \lambda\overline{bm}$ der Werth des Ueberlebens, im Fall $b$ das Alter des Mannes oder des Versorgers, und $m$ wiederum das Alter der Frau ist; und $\lambda\overline{abb} - \lambda\overline{a.\,abb} = \lambda\overline{\mu} - \lambda\overline{a\mu}$ ist dieser Werth, wenn die versorgende Person vom Alter $a$, und die nach dem Tode von jener die Rente genieſsende vom Alter $\mu$ ist. Daher können diese Werthe aus der XXVIIsten Tabelle genommen werden, sobald man die Mittelalter $m$, und $\mu$ ausgemacht hat.

Nun ist aber $\mu$ ein höheres Alter als $m$. Denn $\lambda\overline{abb} = \lambda\overline{\mu}$ ist kleiner als $\lambda\overline{ab} = \lambda\overline{m}$, folglich das Mittelalter für jene kleinere Leibrente gröſser.

Daher auch $\lambda\overline{\mu} - \lambda\overline{a\mu}$ kleiner als $\lambda\overline{m} - \lambda\overline{am}$. Weil das Alter des Versorgers $a$ daſselbe ist, und das Alter der überlebenden Person im ersten Fall gröſser als im letzten ist.

Folglich auch $n^2\,(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{a.\,ab})$ gröſser als $n^2\,(\lambda\overline{abb} - \lambda\overline{aabb})$.

Also *ist in jedem Fall*

$$\lambda'_{i}\overline{ab} = \lambda\overline{ab} + n\,(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab}) + n\,(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{abb}) + n^2(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab} - (\lambda\overline{abb} - \lambda\overline{aabb}$$

***gröſser als*** $\lambda\overline{ab}$, ***wenn nämlich*** $n$ ***eine positive Zahl ist.***

60. *Ex.*,

## 60.

*Ex.* Es sey das Alter des Ehemannes 45 Jahr, der Ehefrau 35 Jahr, die Frage ist, wie gros wird die Eherente nach der wirklichen Sterblichkeit seyn, wenn 1) $n = 0,4$, und 2) wenn $n = 0,3$ auf 4 pro Cent gerechnet?

Hier ist also $a = 35$; $b = 45$.

Folglich $\lambda\overline{ab}$ nach Tab. XXIV. $= 9,7091$. Nun ist auch (nach Tab. XVI.) $9,7091 = \lambda.\overline{54,7.} = \lambda\overline{m}$.

Daraus (nach Tab. XXVII.) $\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab}$
$= \lambda.\overline{54,7} - \lambda.\overline{35.54,7} = 1,4958$
und $\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{abb} = \lambda\overline{54,7} - \lambda\overline{45.54,7} = 2,0779$.

Ferner ist $\lambda\overline{abb} = \lambda\overline{mb} = \lambda.\overline{54,7.45} = 7,6308$
$= \lambda.\overline{62,6}$ (nach Tab. XVI.) und (nach Tab. XXVII.)
$\lambda.\overline{62,6} - \lambda.\overline{62,6.35} = 0,9732$; also $\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab}$
$-(\lambda\overline{abb} - \lambda\overline{aabb}) = 1,4958 - 0,9732 = 0,5226$.

Dadurch erhält man, wenn $n = 0,4$, die *Eherente* nach der *wirklichen* Sterblichkeit,
oder $\lambda'\overline{ab} = 9,7091 + 0,4.1,4958 + 0,4.2,0779$
$+ 0,16.0,5226 = 9,7091 + 1,5131 = 11,2222$,
das ist 16 pro Cent mehr als die tabellarische Eherente beträgt, oder auf jede jährliche Hebung von 10, mehr 15.

Wenn $n = 0,3$, so wird
$\lambda'\overline{ab} = 9,7091 + 0,3.1,4958 + 0,3.2,0779$
$+ 0,09.0,5226 = 9,7091 + 1,1911 = 10,8282$,
das

das iſt 13,6 pro Cent mehr als die tabellariſche Rente, oder nahe an 12 mehr auf jede jährliche Hebung von 10.

## 61.

*Aufgabe* 3. *Den Werth der Verbindungsrente für zwo Perſonen vom Alter a und b zu finden, nach der wirklichen Sterblichkeit, wenn dieſe für die zwo Perſonen verſchieden iſt.*

*Auflöſung.* Es ſey $n$ die beſtändige Gröſse für die Perſon vom Alter $a$; und für die zwote Perſon vom Alter $b$, ſey dafür $n'$ zu ſetzen, ſo iſt

$$\lambda' \overline{ab} = \lambda \overline{ab} + n\,(n'+1)\,(\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab}) + n\,(\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab}) + n'\,(\lambda ab - \lambda \overline{abb}) + n\,n'\,(\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aabb}).$$

*Beweis.* In einem allgemeinen Gliede der Reihe für die Verbindungsrente nach der Tabelle wird anſtatt $\overline{\overline{A}}^{x}$, geſetzt $(n+1)\,\overline{\overline{A}}^{x} - n\,\frac{(\overline{\overline{A}}^{x})^2}{A}$, und für $\overline{\overline{B}}^{x}$ die Zahl $(n'+1)\,\overline{\overline{B}}^{x} - n'.\,\frac{(\overline{\overline{B}}^{x})^2}{B}$. Dadurch wird in der Reihe für $\lambda' \overline{ab}$, das allgemeine Glied

$$= \frac{(n+1)\,(n'+1)\,\overline{\overline{A}}^{x}.\,\overline{\overline{B}}^{x}}{A\,B.\,r^x} - n.(n'+1)\,\frac{(\overline{\overline{A}}^{x})^2\,\overline{\overline{B}}^{x}}{A\,A.\,B.\,r^x} - n'(n+1)\,\frac{\overline{\overline{A}}^{x}\,(\overline{\overline{B}}^{x})^2}{A.\,B\,B.\,r^x} + n\,n'\,\frac{(\overline{\overline{A}}^{x})^2\,(\overline{\overline{B}}^{x})^2}{A\,A.\,B\,B.\,r^x}.$$

Daraus

Daraus wird, (wie oben im §. 57.)

$$\lambda'\overline{ab} = (n+1)(n'+1)\lambda\overline{ab} - n(n'+1)\lambda\overline{aab}$$
$$- n'(n+1)\lambda\overline{abb} + nn'\lambda\overline{aabb}$$
$$= \lambda\overline{ab} + (n'+1)(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab})$$
$$+ n'(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{abb}) - nn'(\lambda\overline{abb} - \lambda\overline{aabb}).$$

Dieſs iſt wiederum in jedem Fall mehr als die tabellariſche Rente, ſo lange $n$ und $n'$ beyde poſitive Gröſsen ſind.

*Ex.* 1. Es ſey wiederum $a = 35$; $b = 45$, und für $a$ ſey $n = 0,4$; für $b$ ſey $n = 0,3$; ſo wird der Werth der Verbindungsrente nach der wirklichen Sterblichkeit, oder

$$\lambda'\overline{35.45} = 9,7091 + 0,4.\ 1,4958 + 0,3.2,0779$$
$$+ 0,12.0,5236 = 9,7091 + 1,2844 = 10,9935,$$

oder nahe 13 Procent mehr, als der Werth nach den Tabellen, und auch nahe an 13 mehr für jede jährliche Hebung von 10.

*Ex.* 2. Wenn $a = 45$; $b = 35$, ſo iſt

$$\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab} = 2,0779$$
$$\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{abb} = 1,4958$$

und $\lambda ab - \lambda\overline{aab} - (\lambda\overline{abb} - \lambda\overline{aabb})$ (wie im §. 60.) $= 0,5226$.

Folglich wenn für $a$, $n = 0,4$, und für $b$, $n = 0,3$, ſo iſt

$$\lambda\overline{ab} = 9,7091 + 0,4.\ 2,0779 + 0,3.\ 1,4058$$
$$+ 0,12.0,5226 = 9,7091 + 1,34161 = 11,0507$$

das iſt um 13,8 Procent mehr als der tabellariſche Werth.

62. *Auf-*

Digitized by Google

## 62.

*Aufgabe* 4. ***Den Werth der Rente auf das Ueberleben einer Perſon vom gegebenen Alter a über eine andere vom Alter b nach der wirklichen Sterblichkeit zu finden, wenn dieſe verſchieden iſt bey den zwo Perſonen.***

*Auflöſung.* Es ſey wie vorher bey der Perſon vom Alter $a$, die beſtändige Gröſse $n$; und bey der vom Alter $b$, $n'$, und die erſtere vom Alter $a$ diejenige, welche die jährliche Leibrente nach dem Tode der zwoten vom Alter $b$ ziehen ſoll.

Alsdenn iſt der baare Werth der *Rente auf das Ueberleben*, oder $\lambda'\overline{a} - \lambda'\overline{ab} = \lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab} + n(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa} - (\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab})) - n'(\lambda ab - \lambda\overline{abb}) + nn'(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab} - (\lambda\overline{abb} - \lambda\overline{aabb}))$.

*Beweis.* Es iſt $\lambda'\overline{a} = \lambda\overline{a} + n(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa})$ (§. 53.) und $\lambda' ab = \lambda\overline{ab} + n(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab}) + n'(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{abb}) + nn'(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab} - (\lambda\overline{abb} - \lambda\overline{aabb}))$. (§. 60.)

Folglich

$$\begin{aligned}\lambda'\overline{a} - \lambda'\overline{ab} &= \lambda\overline{a} - \lambda ab + n(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa}) \\ &\quad - n(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab}) - n'(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{abb}) \\ &\quad - nn'(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab} - (\lambda\overline{abb} - \lambda\overline{aabb})) \\ &= \lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab} + n(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa} - (\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{aab})) \\ &\quad - n'(\lambda\overline{ab} - \lambda\overline{abb}) - nn'(\lambda ab - \lambda\overline{aab} \\ &\quad - (\lambda\overline{abb} - \lambda\overline{aabb})).\end{aligned}$$

## 63.

*Zusatz* 1. Es ist dieser gesuchte Werth auch der baare Werth einer *beständigen jährlichen Wittwenrente nach der wirklichen Sterblichkeit*, oder der Werth des *Einsatzes* in Wittwencassen auf eine solche Rente für die überlebende Ehefrau.

## 64.

*Zusatz* 2. Der hier gesuchte Werth wird am kürzesten gefunden, wenn vorher die Werthe der Leibrente, und der Verbindungsrente, jede für sich nach §. 53. und 59. gesucht sind. Die allgemeine Formel in dieser Aufgabe dienet nur, um allgemeine Resultate über die Folgen der abweichenden Sterblichkeit auf jene Werthe zu erhalten.

Ist z. E. $a$ das Alter der Frau, 35 Jahr, $b$ das Alter des Mannes 45 Jahr, und für die Ehefrauen $n = 0,4$; für die Männer $n' = 0,3$; so ist $\lambda'\overline{a} = 15,4215$. (§. 54.) und $\lambda'\overline{ab} = 10,9935$. (§. 61.) Daher $\lambda'\overline{a} - \lambda'\overline{ab} = 4,4280$. Nach den Tabellen ist selbige 4,4084. Also in jenem Fall nach der wirklichen Sterblichkeit nur um 0,0196, das ist etwa um $\frac{1}{2}$ Procent gröſſer, oder in Hinsicht auf die jährliche Hebung 2 Procente mehr.

Es ist nicht zu verwundern, daſs der Werth der Einsätze in einigen Fällen gröſſer werde, obschon die Sterblichkeit geringer ist. Die Folge der geringern Sterb-

Digitized by Google

Sterblichkeit ist, auf einer Seite, dass die Ehezeit länger dauert, und dadurch die Wittwe später zur Hebung kommt; auf der andern aber, dass die Dauer des Ueberlebens der Wittwe vergrössert werden kann. Das letztere kann den Werth der Einsätze noch mehr vergrössern, als jenes ihn vermindert.

*Ex.* 2. Ist $n = 0,4$, für beyde Personen, also $n = n'$, und $a$ wiederum $= 35$; $b = 45$ Jahr, so ist $\lambda' \overline{a} = 15,4215$. (§. 54.) und $\lambda' \overline{ab} = 11,2212$. (§. 60.) Folglich $\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} = 4,2003$. Der tabellarische ist 4,4084; also jener *kleiner* um 0,2081, das ist, fast um 5 Procent, und um 21 Procent für die jährliche Hebung.

*Ex.* 3. Ist noch $n = n' = 0,3$, so ist $\lambda' \overline{a} = 15,0955$. (§. 54.) und $\lambda' \overline{ab} = 10,8282$. (§. 60.) Also $\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} = 4,2673$, um 0,1411, oder 3 Procent kleiner als der tabellarische, und auf die jährliche Hebung 14 Procent.

*Ex.* 4. Es sey umgekehrt die zu versorgende Person die ältere, der Versorger der jüngere, oder hier $a = 45$, und $b = 35$, und dann $n = 0,4$; $n' = 0,3$, so ist

$$\lambda' \overline{a} = 13,2806 \text{ (§. 54.) und}$$
$$\lambda' \overline{ab} = 11,0507 \text{ (§. 61.)}$$
$$\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} = 2,2299$$
$$\text{Aber } \lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab} = 2,3017$$

Unterschied 0,0718, etwas über 3 Procent ist der ersten Werth *geringer*, oder 7 Procent der jährlichen Hebung.

*Ex.* 5.

Digitized by Google

*Ex.* 5. Es sey für denselben Fall $n = n' = 0,4$, so ist

$$\lambda' \overline{a} = 13,2806 \quad \S.\ 54.$$
$$\lambda' \overline{ab} = 11,2212 \quad \S.\ 60.$$

$$\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} = 2,0594$$
$$\lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab} = 2,3017$$

Unterschied $= 0,2423$, nahe an $10\frac{1}{2}$ Procent weniger als nach den Tabellen, und 24 Procent der jährlichen Hebung.

*Ex.* 6. Es sey $n = n' = 0,3$, so ist

$$\lambda' \overline{a} = 12,9631 \quad \S.\ 54.$$
$$\lambda' \overline{ab} = 10,8282 \quad \S.\ 60.$$

$$\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} = 2,1349 \quad \text{Dagegen}$$
$$\lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab} = 2,3017$$

Unterschied $= 0,1668$. Jener ist nahe an 7 Procent *geringer* als der tabellarische, und 17 Procent der jährlichen Hebung weniger.

## 65.

*Zusatz* 3. Sind die Personen beyde von gleichem Alter, und ist $n = n'$, so wird die Abweichung in den Einsätzen, oder der Unterschied $\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{aa} - (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa}) = n(\lambda \overline{a} - 3\lambda \overline{aa} + 2\lambda \overline{aaa}) - nn(\lambda \overline{aa} - 2\lambda \overline{aaa} + \lambda \overline{aaaa})$. Das letzte abzuziehende Stück ist jedesmal (nach §. 59.) eine positive Grösse, wenn $n$ positiv ist. Allein das erste Stück $n(\lambda \overline{a} - 3\lambda \overline{aa} + 2\lambda \overline{aaa})$

iſt ſchon für ſich *negativ*, wenn das Alter zwiſchen 15 und 60 Jahren iſt.

Es iſt nämlich ſolches

$= n\,(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa} - 2\,(\lambda\overline{aa} - \lambda\overline{aaa}))$

Man nehme 1) $a = 15$ Jahr, ſo iſt

$\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa} = 2,9800$, nach Tab. XXVII.

$\lambda\overline{aa} = 14,6304 = \lambda\overline{32,5}$ nach Tab. XVI.

Folglich $\lambda\overline{aa} - \lambda\overline{aaa} = 1,9000$, nach Tab. XXVI.

Alſo $\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa} - 2\,(\lambda\overline{aa} - \lambda\overline{aaa}) = 2,9800 - 3,8000 = -0,8200.$

2) Es ſey $a = 60$ Jahr, ſo iſt

$\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa} = 2,7847$; und $\lambda\overline{aa} = 5,5575 = \lambda\overline{72}$.

Alſo $\lambda\overline{aa} - \lambda\overline{aaa} = 1,4250$.

Folglich $2,7847 - 2,8500 = -0,0653$.

3) Es ſey dagegen $a = 70$ Jahr, ſo iſt

$\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa} = 2,3801$, und

$\lambda\overline{aa} = 3,6100 = \lambda\overline{83,2}$.

Aber $\lambda\overline{aa} - \lambda\overline{aaa} = \lambda.\overline{83,2} - \lambda\overline{70.83,2} = 1,0417$.

Alſo $2,3821 - 2,0834 = +0,2967$.

Sucht man auch $\lambda\overline{aaa} - \lambda\overline{aaaa}$, ſo erhält man $\lambda\overline{aaa} = \lambda.\overline{70.83,2} = 2,5977 = \lambda\overline{88}$, und $\lambda\overline{88} - \lambda\overline{70.88} = 0,5981$.

Folglich $\lambda\overline{aa} - \lambda\overline{aaa} - (\lambda\overline{aaa} - \lambda\overline{aaaa}) = 1,0417 - 0,5981 = 0,4436$.

Der geſammte Unterſchied iſt hier

$= n.0,2967 - n\,n.0,4436 = n(0,2967 - n.0,4436)$.

Dieſs

Dieſs iſt eine poſitive Differenz, es ſey denn daſs $n = 0{,}7$, oder doch nur wenig kleiner genommen werde.

## 66.

*Zuſatz* 4. Die Einſätze, oder die Renten aufs Ueberleben nach der wirklichen Sterblichkeit, werden *kleiner* ſeyn als die tabellariſchen, wenn die *Perſon, welche überleben ſoll, älter* iſt als die andere, nach deren Tode jene die Rente ziehen ſoll, oder bey Wittwenverſorgungen, wenn der Mann jünger als die Frau iſt, vorausgeſetzt daſs $n = n'$, und poſitiv iſt. Dagegen nehmen ſie zu, werden den tabellariſchen Werthen gleich, und können ſie übertreffen, wenn die Frau jünger, der Mann älter iſt. In dem erſten Fall iſt die Verminderung des Einſatzes, welche aus der geringern Sterblichkeit entſpringt, gröſser; im letztern kleiner, und dagegen die Dauer des Ueberlebens bey Wittwen gröſser.

*Zuſatz* 5. Iſt $n'$ bey der verſorgenden Perſon gröſser, als $n$ bey der, welche die Erwartung hat, ſo werden die Werthe der Renten *kleiner;* gröſser im entgegengeſetzten Fall.

## 67.

*Zuſatz* 6. Der Fall, wo das Alter der erwartenden Perſon, oder der zu verſorgenden Frau, $a = 35$ Jahr, das Alter der zwoten Perſon, oder des Ehemannes, 45 Jahr iſt, kommt am meiſten bey Wittwencaſſen in



Digitized by Google

Betracht, wenn man im Allgemeinen einen Ueberſchlag machen will. Es verlohnt ſich für dieſen Fall noch zu unterſuchen, wie weit $n$ und $n'$ verſchieden ſeyn können, ohne daſs der Werth des Einſatzes dadurch vergröſsert oder vermindert werde.

Es ſey $\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} - (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab}) = D$, das iſt der Unterſchied der Werthe nach der wirklichen und nach der tabellariſchen Sterblichkeit, ſo iſt

$$D = n(\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa}) - n(\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab}) - n'(\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb}) - nn'(\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab} - (\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aabb}))$$ nach §. 62.

Nun auch $\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa} = 3,2599$ nach Tab. XXVII.

Ferner $\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab} = 1,4958$,

$\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb} = 2,0779$, und

$\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab} - (\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aabb}) = 0,5226$ (nach §. 60.)

Man ſchreibe $n' = mn$, ſo wird $D = 0$, wenn

$n.3,2599 = n.1,4958 + mn.2,0779 + mn^2.0,5226$ und

$3,2599 - 1,4958 = m.2,0779 + mn.0,5226$.

Daraus $\frac{1,7641}{2,0779 + n.0,5226} = m$.

Man kann ziemlich zuverläſsig $n = 0,4$ annehmen. (§. 48.) Daraus wird $m = 0,77$. Alſo müſste $n' = 0,308$, oder $0,31$ bey den Männern ſeyn; oder wenn man $m = 0,8$ nimmt, $n' = 0,32$ ſeyn.

68. *Zu-*

## 68.

*Zusatz* 7. Nun ist zwar bey den Männern in der Calenbergischen Gesellschaft nur $n = 0,27$ im Durchschnitt befunden, (§. 49.) allein dieſs gilt nur von denen, die in dem ersten Termin eintreten. Die folgenden würden nach aller Wahrscheinlichkeit, *n* etwas gröſser gegeben haben, (§. 2.) Daher glaube ich, es lasse sich als ein sicheres Resultat annehmen:

„*Wenn die Calenbergische Gesellschaft Einsätze nach*
„*den Süſsmilchischen Tabellen genommen hätte, so würde*
„*kein Mangel in Casſa entstanden, und die Nachtheile*
„*aus der etwas gröſsern Sterblichkeit der Männer durch*
„*die mindere allgemeine Sterblichkeit in der ausgesuchten*
„*Gesellschaft wiederum gut gemacht worden seyn.*“

## 69.

*Aufgabe* 5. *Den Werth der beſtändigen Wittwenrente in jährlichen Beyträgen, während der Ehedauer, nach der wirklichen Sterblichkeit zu finden, oder, im Allgemeinen, die Gröſse der jährlichen Termine einer Verbindungsrente zwoer Personen vom gegebenen Alter a und b zu finden, davon der baare Werth so groſs ist, als der Werth der Rente auf das Ueberleben der einen über die andere.*

*Auflösung.*

1) Wenn der *Beytrag am Ende des Jahrs* jedesmal bezahlet wird, oder die Verbindungsrente eine

*gewöhnliche* Verbindungsrente seyn soll, so ist $C' = \frac{\lambda'\overline{a} - \lambda'\overline{ab}}{\lambda'\overline{ab}}$, wo $C'$ die Gröfse der jährlichen Termine oder der jährlichen Beyträge ist. Denn es soll $C'\lambda'\overline{ab} = \lambda'\overline{a} - \lambda'\overline{ab}$ seyn.

2) Wenn die Beyträge *vorschufsweise* im Anfang jedes Jahrs bezahlet werden, so ist

$$C' = \frac{\lambda'\overline{a}\,\lambda'\overline{ab}}{1+\lambda'\overline{ab}}.$$

Denn in diesem soll $\lambda'\overline{a} - \lambda\overline{ab} = C' + C'\lambda'\overline{ab}$ seyn.

Diese letzten Beyträge sind es, die in der XXVIIIsten Tabelle stehen. Die meisten male sind es auch diese die man meint.

## 70.

*Zusatz* 1. Aus der Natur der Sache ist auch ohne Rechnung begreiflich, dafs der Vortheil aus einer geringern Sterblichkeit erheblicher seyn werde, wenn die Wittwenrenten auf *Beytragsfufs* zu bezahlen sind, als bey dem *Capitalfufs*. Leben beyde Personen länger, als nach den Tabellen erwartet ist, so wird wegen der längern Dauer der Verbindung, nicht nur 1) die Wittwenrente später zahlbar, sondern 2) es kommen auch mehr Beyträge zur Casse. Der letztere Vortheil fehlet bey den Einsätzen.

Dieſs zeigt auch der allgemeine Ausdruck. Ist der Beytrag nach den Tabellen C; der für die wirckliche Sterblichkeit, C', so ist

$C' =$

Digitized by Google

$C' = \frac{\lambda'\overline{a}\ \lambda'\overline{ab}}{\lambda'\overline{ab}}$, nämlich Beytrag ohne Vorschuss nach n. 1. §. 69. Man setze der Kürze wegen den *Unterschied* der *Einsätze*, oder $\lambda'\overline{a} - \lambda'\overline{ab} - (\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}) = d$; und den Unterschied der Verbindungsrenten $\lambda'\overline{ab} - \lambda\overline{ab} = \delta$, so ist

$$C' = \frac{\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab} + d}{\lambda\overline{ab} + \delta} = \frac{\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}}{\lambda\overline{ab}} - \frac{\delta(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab})}{\lambda\overline{ab}(\lambda\overline{ab} + \delta)} + \frac{d}{\lambda\overline{ab} + \delta} \cdot .$$

Folglich $C - C' = \frac{\delta(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}) - d\,\lambda\overline{ab}}{\lambda\overline{ab}(\lambda\overline{ab} + \delta)}$;

Nun ist $\lambda'\overline{ab}$ jedesmal gröfser als $\lambda\overline{ab}$, wenn die Sterblichkeit geringer ist, §. 59. folglich ist $\delta$ eine *positive* Zahl. Dieſs ist $\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}$ gleichfalls.

Ist nun auch der *Einsatz* nach der wirklichen Sterblichkeit *kleiner* als der tabellarische, so ist *d negativ*, folglich — d. $\lambda\overline{ab}$ eine *positive* Gröfse; dann wird noch mehr $C - C'$ *positiv*, oder C *nach den Tabellen gröfser als nach der wirklichen geringern Sterblichkeit.*

Ist aber gleich *d positiv*, das ist, der Einsatz nach den Tabellen *kleiner*, als nach der wirklichen Sterblichkeit, also — d. $\lambda\overline{ab}$ *negativ*, so kann doch $\delta$. $(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab})$ — d. $\lambda\overline{ab}$ *positiv* seyn, und dieſs auch deswegen, weil der Factor $\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}$ den Factor $\lambda\overline{ab}$ übertreffen kann in solchen Fällen, wo die Frau, deren Alter *a*, um vieles jünger ist, als der Mann, dessen Alter *b* ist. Bey den

*Einſätzen* hat das gröſste Alter des Mannes die Folge, daſs der Vortheil aus der geringern Sterblichkeit geſchwächet wird, oder gar in Nachtheil übergeht, (nach §. 66; hier aber bey den Contributionen iſt jenes von einer Seite vortheilhaft.

## 71.

*Zuſatz* 2. Der Unterſchied der Beyträge $C - C'$ iſt auch $= \frac{\delta . \lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab} . n . (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa})}{\lambda \overline{ab} . - (\lambda \overline{ab} + \delta)}$. Denn es iſt $d = \lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} - (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab}) = \lambda' \overline{a} - \lambda \overline{a} - (\lambda' \overline{ab} - \lambda \overline{ab}) = n (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa}) - \delta$.

Folglich $C' - C = \frac{\delta . (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab}) - d \lambda \overline{ab}}{\lambda \overline{ab} . (\lambda \overline{ab} + \delta)} =$

$\frac{\delta . \lambda \overline{a} - n . \lambda \overline{ab} (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa})}{\lambda \overline{ab} . (\lambda \overline{ab} + \delta)}$.

*Zuſatz* 3. Iſt von vorſchüſslichen Beyträgen die Rede, ſo wird

$C - C' = \frac{\delta . (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab}) - d (1 + \lambda \overline{ab})}{(1 + \lambda \overline{ab}) . (1 + \lambda \overline{ab} + d)}$

$= \frac{\delta (1 + \lambda \overline{a}) - n . (1 + \lambda \overline{ab}) . (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa})}{(1 + \lambda \overline{ab}) (1 + \lambda \overline{ab} + \delta)}$

## 72.

*Ex.* 1. Es ſey $a = 35$; $b = 45$ Jahr, und

1) $n = n' = 0,4$.

ſo iſt $C' = \frac{\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab}}{\lambda' \overline{ab}} = \frac{4,2003}{11,2212}$ (§. 64.)

$= 0,3743$.

Soll

Soll C′ der vorschüfsliche Beytrag seyn, so ist solcher $= \frac{4,2003}{12,2213} = 0,3437$. Dagegen ist der tabellarische Beytrag nach Tab. XXVII. $= 0,4116$. Jener also *kleiner* um 0,0679, das ist nahe 6,8 Procent der zu versichernden Pension.

2) $n = n' = 0,3$.

so ist $C' = \frac{4,2673}{10,8282}$ (§. 64.) $= 0,3941$.

Und der *vorschüfsliche* Beytrag $= \frac{4,2673}{11,8282} = 0,3608$. Dieſs ist kleiner als 0,4116, um 0,0508, das ist um 5 Procent der Pension oder der jährlichen Hebung,

3) $n = 0,4$; $n' = 0,3$.

so ist $C' = \frac{4,4280}{10,9935} = 0,4028$, und der vorschüfsliche Beytrag $= \frac{4,4280}{11,9935} = 0,3692$ kleiner als 0,4116, um 0,0424, das ist, um 4 Procent der Hebung.

## 73.

*Ex.* 2. Es sey $a = 45$; $b = 35$.

1) $n = n' = 0,4$.

so ist $C' = \frac{\lambda' \overline{a} - \lambda \overline{a\,b}}{\lambda' \overline{a\,b}} = \frac{2,0594}{11,2212} = 0,1835$.

Der vorschüfsliche Beytrag ist $\frac{2,0594}{12,2212} = 0,1685$. Dagegen ist nach den Tabellen $C = 0,2149$. Also der Unterschied $= 0,0464$, das ist, auf jede Pension 4,6

Procent weniger, aber in Hinſicht auf den zu leiſtenden Beytrag ſelbſt, mehr als 21½ Procent weniger.

2) $n = n' = 0,3$.

ſo iſt $C' = \frac{2,1349}{10,8282} = 0,1972$. Der *vorſchüſsliche* Beytrag iſt $\frac{2,1349}{11,8282} = 0,1805$, um 3, 4 Procent der jährlichen Hebung geringer, und um 16 Procent auf die Beyträge ſelbſt.

3) $n = 0,4$; $n' = 0,3$.

ſo iſt $C' = \frac{2,2299}{11,0507} = 0,2018$. Der vorſchüſsliche Beytrag $= \frac{2,2299}{12,0507} = 0,1850$. Alſo kleiner um 3 Procent auf die Penſion, und um 12 Procent der Beyträge.

## 74.

*Zuſatz* 4. Es ſey $a = 35$; $b = 45$ Jahr, und bey den Frauen vom Alter $a$, ſey $n = 0,4$, ſo findet man den Werth, welchen $n' = m\,n$ bey den Männern haben muſs, wenn der *Beytrag* dem *tabellariſchen* gleich ſeyn ſoll. Iſt denn $n'$ gröſser als dieſer Werth, ſo wird der wirklich erforderliche Beytrag kleiner als der *berechnete*, und die Caſſe, welche nach den Tabellen einnimmt, gewinnt; dagegen verliert ſie, wenn $n'$ kleiner iſt als die gefundene Zahl.

Soll

Soll nämlich $C' - C = o$ seyn, so muss nach §. 70. $\delta(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}) = d.\lambda\overline{ab}$ seyn, oder nach §. 71. *Zus.* 2. $\delta\lambda\overline{a} = n.\lambda\overline{ab}.(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa})$.

Hier wird aber auf nicht-vorschüssliche Beyträge gerechnet.

Nun ist für den angenommenen Fall $\delta = n.1,4958 + m\,n.2,0779 + m\,n^2.0,5226$ (nach §. 61.), und $\lambda\overline{a} = 14,1175$, auch $\lambda\overline{ab} = 9,7091$, und $\lambda\overline{a} - \lambda\overline{aa} = 3,2599$.

Daraus erhält man

$14,1175\,(1,4958 + m.2,0779 + m\,n.0,5226) = 9,7091 \cdot 3,2599$, und

$$\frac{9,7091 \cdot 3,2599 - 14.1175 \cdot 1,4958}{14,1175 \cdot (2,0779 + n.0,5226)} = m.$$ oder, weil

$n = 0,4$; $\frac{10,5337}{32,2853} = m = 0,326$.

Also $n' = m\,n = 0,13$.

Setzet man diesen Werth für n', in dem Ausdruck $\lambda'\overline{ab}$ im §. 61., so bekommt man $\lambda'\overline{ab} = 10,6047$. und $\frac{\lambda'\overline{a} - \lambda'\overline{ab}}{\lambda'\overline{ab}} = \frac{15,4215 - 10,6047}{10,6047} = 0,4541$ so gross als dieser Beytrag nach den Tabellen.

Rechnet man auf *vorschüssliche Beyträge*, so wird $C - C' = o$, wenn $1 + 14,1175\,(1,4958 + m.2,0779 + m\,n.0,5226) = (1 + 9,7091).3,2599$.

Daraus wird $m = 0,356$, und $n' = m\,n = 0,1424$, wenig gröser als vorher.

Das

Digitized by Google

Das heifst bey dem vorher beſtimmten Alter der Perſonen, kann die Sterblichkeit des weiblichen Geſchlechts ſo viel kleiner ſeyn, als die des männlichen, daſs $n$ bey jenem 0, 4 wird, wenn es bey dieſem nur 0, 14 iſt, und dennoch wird die Wittwenrente durch die nach den Tabellen berechnete Beyträge völlig bezahlt.

Wenn $n = 0, 4$, und $n' = 0, 14$, ſo iſt im erſten Jahr, oder die *anfängliche wirkliche Sterblichkeit* zu der *tabellariſchen* bey den Frauen vom Alter 35 Jahr, wie $1 - 0, 4 : 1 = 0, 6 : 1$, und bey den Männern vom Alter 45 Jahr, wie $1 - 0, 14 = 0, 86 : 1$. Folglich die bey den Frauen zu der bey den Männern wie $1 : 1, 4$.

## 74.

*Zuſatz* 5. Bey der Calenbergiſchen iſt $n'$ nicht ſo klein geweſen, als es ſeyn kann, um die Caſſe aufser Schaden zu ſetzen. Es iſt klar, wenn in dieſer Geſellſchaft von Anfang an die Beyträge nach *Süſsmilchs* Tabelle bezahlet wären, ſie würde der verſchiedenen Sterblichkeit der Geſchlechter ohnerachtet dennoch beſtanden ſeyn. Nicht zu ſagen, daſs jener Unterſchied in der Sterblichkeit der Geſchlechter, bey ihr nur in Hinſicht der im Anfang zuſammengetretenen Perſonen aus den obigen Erfahrungen erweislich iſt, ſich alſo in den folgenden Jahren mehr verloren haben mögte, da die Urſachen des anfänglichen Zudrängens ſchwächer wurden.



Digitized by Google

## 76.

*Zusatz* 6. Sind *Beyträge* wie *Einsätze* nach einer für beyde Geschlechter gemeinschaftlichen Sterblichkeits-Tafel berechnet, so ist bey Wittwen-Versorgungs-Gesellschaften von der gewöhnlichen Einrichtung, die Casse sicherer bey dem sogenannten *Contributions-Fuss*, als bey dem *Capital-Fuss*. Eine geringere Sterblichkeit der Frauen verursacht bey jenem noch keine Defecte, wenn sie diese Folge schon bey dem letztern hat. Auch haben die nicht vorschüslichen Beyträge einigen obgleich nicht sehr erheblichen Vorzug vor den vorschüslichen. (§. 74.)

Ich sage *sicherer* sey das eine als das andere. Es geben die bisherigen Erfahrungen ganz und gar keinen Grund, auch bey den Einsätzen etwas zu befürchten, wenn diese nur nach einer bewährten Mortalitäts-Tafel, in unsern Gegenden, und überhaupt wohl in Deutschland, nach der *Süssmilchischen*, berechnet sind.

Zwote

## Zwote Abhandlung.

## *Vom Verhältniſs der Wittwenzahl zu der Zahl der ſtehenden Ehen.*

### I.

Eine Geſellſchaft von Ehepaaren gleichen Alters trete zuſammen. Ihre Zahl ſey N, das Alter der Frauen *a*; das Alter der Männer ſey *b*. Die Zahl der Lebenden in den Tabellen vom Alter *a*, ſey A; die zu *b* gehörige B; und $\overset{x}{-}A$, $\overset{x}{-}B$ bezeichne die Zahl der Lebenden aus A im *x*ten Jahre. Dieſs ſind die Zahlen, die in den Tabellen bey den Jahren a+x; b+x ſtehen, das iſt, die im Laufe dieſer Jahre und im Anfang der nächſtfolgenden als *lebend* angenommen werden. Es wird hier nur auf ganze Jahre gerechnet, und aller Abgang jedesmal auf den *Anfang der Jahre* geſetzet. (*Einleit.* §. 50.)

So iſt die Summe *der ſtehenden Ehen* im xten Jahr $= \frac{\overset{x}{-}A.\overset{x}{-}B}{A.B} \cdot N$. Die Zahl N kann auch $= 1$ geſetzet werden, und alſo wegbleiben.

Die Wittwenzahl W in demſelben Jahr iſt

$$= \frac{\overset{x}{-}A}{A}\left(1 - \frac{\overset{x}{-}B}{B}\right) \cdot \cdot$$

Alſo im xte Jahr

$$= \overset{x}{-}B : B - \overset{x}{-}B.$$

Dieſes

Dieſes Verhältniſs iſt im Anfang, wo $\overset{x}{-}B = B$, unendlich groſs; und wenn $x$ das höchſte Lebensjahr iſt, unendlich klein, nämlich $= o : B$. Hier findet zwiſchen dieſen beyden Aeuſserſten kein Gröſstes oder Kleinſtes Statt.

Die Zahl der Wittwen für ſich iſt ein *Gröſstes* in dem Jahr, wenn $\overset{x}{-}A . (B - \overset{x}{-}B)$ ein Gröſstes iſt. Nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben würde dieſs ſich eräugnen nach der halben Altersergänzung der Frauen. (*)

## 2.

Die Zahl der in jedem unbeſtimmten xten Jahr *neu entſtehenden Wittwen* iſt $\frac{A . \Delta \overset{x-1}{-}B}{A . B}$ wenn $N = 1$ genommen wird.

Die

(*) Denn $\overset{x}{-}A = x$, und $\overset{x}{-}B = y$ geſetzet, ſo iſt für den Fall daſs $x(B - y)$ ein *Maximum* ſeyn ſoll,

$$B\,dx = y\,dx + x\,dy.$$

Aber nach der Hypotheſe iſt $dy = dx$, folglich $B - y = x$, und weil $B - y$ ſo groſs iſt als die Zahl der Geſtorbenen aus B, und auch ſo groſs als die Zahl der Geſtorbenen aus A, das iſt, als $A - x$, ſo iſt $A - x = x$, und $\frac{A}{2} = x$, das heiſset, die Wittwenzahl iſt ein Gröſstes, wenn die Hälfte der Frauen noch am Leben ſind, und dieſs iſt, wenn ihre Altersergänzung halb verfloſſen iſt.

Digitized by Google

Für das unbeſtimmte *n*te Jahr

$\frac{{}^{n}A.\Delta^{n-1}B}{A.\ B.\ r^{n-1}}\ \lambda a+n-1$. Dieſe Reihe giebt den Werth des Ueberlebens der Frau über den Mann, oder die *Wittwenrente* (nach *Einleit.* Cap. IV, §. 18.).

## 4.

Wenn eine Geſellſchaft von gleichen Ehepaaren als vorher (§. 1.) beſtimmt iſt, ſich *gleichförmig recrutirt*, ſo müſſen die folgenden Jahre durch, jedes Jahr dieſelbe Zahl von Paaren, Mann und Frau von demſelben Alter, wie vorher, hinzukommen.

Alsdenn iſt 1) *die Summe aller entſtandenen Wittwen* nach x Jahren, oder im xten Jahr, ſo wie ſie nämlich im Anfang dieſes Jahrs geworden iſt

$$= \frac{{}^{1}A}{A}\left(1-\frac{{}^{1}B}{B}\right)+\frac{{}^{2}A}{A}\left(1-\frac{{}^{2}B}{B}\right)++$$
$$\frac{{}^{x}A}{A}\left(1-\frac{{}^{x}B}{B}\right).$$

Von den anfänglichen *N* Paaren, wo aber N immer $= 1$ geſetzet wird, ſind vorhanden $\frac{{}^{x}A}{A}\left(1-\frac{{}^{x}B}{B}\right)$; von denen in dem nächſtfolgenden Jahre Eingetretenen ſind $\frac{{}^{x-1}A}{A}\left(1-\frac{{}^{x-1}B}{B}\right)$ noch da, und ſo weiter. Von den zuletzt im Anfang des xten Jahrs hinzu gekommenen

menen ſind, weil gleich ein Abgang von den lebenden Männern erfolgt, vorhanden $\frac{{}^{1}\bar{A}}{A}\left(1-\frac{{}^{1}\bar{B}}{B}\right)$.

Die Summe aller macht $\frac{{}^{1}\bar{A}+{}^{2}\bar{A}++{}^{x}\bar{A}}{A}-$

$\left(\frac{{}^{1}\bar{A}.\,{}^{1}\bar{B}}{A.\,B.}+\frac{{}^{2}\bar{A}\,{}^{2}\bar{B}}{A\,B}++\frac{{}^{x}\bar{A}.\,{}^{x}\bar{B}}{A\,B}\right)$..

2) Die *Summe der ſtehenden Ehen* iſt

$\frac{{}^{1}\bar{A}\,{}^{1}\bar{B}}{A\,B}+\frac{{}^{2}\bar{A}.\,{}^{2}\bar{B}}{A\,B}+++\frac{{}^{x}\bar{A}\,{}^{x}\bar{B}}{A\,B}$..

## 5.

Eine ſolche Geſellſchaft kommt zum *Beharrungsſtande* dann, wenn die Zahl der *ſtehenden Ehen*, und der *Wittwen* beſtändig bleibt. Bis dahin wachſen beyde.

Die Zahl *der ſtehenden Ehen* wird beſtändig, wenn entweder ${}^{x}\bar{A}$, oder ${}^{x}\bar{B}$ verſchwindet, das iſt, wenn die Altersergänzung der ältern Perſon verfloſſen iſt. Die Zahl der Wittwen wird erſt ein *Maximum*, und *beſtändig*, wenn ${}^{x}\bar{A}=0$ wird, das iſt, nach verfloſſener Altersergänzung der Frauen.

Die gröſste und dann beſtändige Wittwenzahl iſt gleich der *mittlern Dauer des Ueberlebens der Frau* über

den Mann, wenn die Zahl der jährlich hinzukömmenden Paare N = 1 ist. Es ist nämlich

$$\frac{\frac{1}{A}}{A}\left(1-\frac{\frac{1}{B}}{B}\right)+\,+=E\overline{a}-C\overline{ab}.$$ (*Einleitung* Cap. 3. §. 109.)

Und die gröfste und beständige Zahl der stehenden Ehen ist $= C\overline{ab}$, oder *der mittlern Dauer der Verbindung.*

Folglich verhält sich *die Zahl der Wittwen zu den stehenden Ehen im Beharrungsstande der sich gleichförmig ergänzenden Gesellschaft, wie die Dauer des Ueberlebens zur Dauer der Verbindung*, wie $E\overline{a} - C\overline{ab} : C\overline{ab}$.

Es versteht sich, dafs auf das Wiederheyrathen der Wittwen keine Rücksicht genommen werde.

## 6.

Ist die Frau 35, und der Mann 45 Jahr alt, so ist dieſs Verhältnifs = 10, 691 : 14, 80 = 1 : 1, 37, das ist, auf Eine Wittwe würden nicht mehr als 1, 37 Ehen kommen. Tab. XXIII.

Sind beyde vom Alter 35, so ist das Verhältnifs 8, 14 : 17, 35 = 1 : 2, 13.

Ist die Frau 25 Jahr, der Mann 30, so ist das Verhältnifs 10, 90 : 20, 88 = 1 : 1, 975; das ist, es kommen nahe an zwo stehende Ehen auf Eine Wittwe.

Ist die Frau 25, der Mann 35, so hat man 12, 39 : 13, 39 = 1 : 1, 56.

Dieſs

Dieſs letztere Verhältniſs ſcheinet demjenigen am nächſten zu kommen, was in der vermiſchten Geſellſchaft im gemeinen Leben gefunden wird, wenn man dieſe letztere im Durchſchnitt als eine ſich immer gleichförmig erſetzende Geſellſchaft anſieht. Wenigſtens wird dieſs wahrſcheinlich durch die Erfahrungen, die Hr. *Guden* (*), freylich in einer andern Abſicht, nämlich das Gegentheil zu beweiſen, geſammlet hat.

## 7.

*Aufgabe.* Es ſey das Verhältniſs der *Wittwenzahl* (das iſt ſolcher, die im Wittwenſtande *leben*) zu der Zahl der *ſtehenden Ehen* gegeben; ferner das Verhältniſs der *wiederheyrathenden Wittwen* zu der vorigen Wittwenzahl; und noch das Verhältniſs der *im Wittwenſtande ſterbenden* zu eben derſelben; die Geſellſchaft ſey im *Beharrungsſtande*; daraus das Verhältniſs der *ſtehenden Ehen* zu *der Zahl der Wittwen* zu finden, die aus einer ſolchen Zahl von Ehen entſtanden ſeyn würde, wenn kein Wiederheyrathen Statt gefunden.

*Auflöſung.* Die Zahl der *vorhandenen Wittwen* ſey W; der *ſtehenden Ehen*, E, und $E = rW$.

Ferner ſey $\frac{W}{n}$ der Theil der im Anfang eines Jahrs vorhandenen Wittwen, der durch Heyrath aus der



(*) *Theorie und Vorſchläge zu Wittwencaſſen.* 1782. 4.

Wittwenzahl austritt. $\frac{W}{m}$ ſey der durch den Tod abgehende Theil derſelben. Endlich W' die Zahl der Wittwen, welche da geweſen ſeyn würden, wenn kein anderer Abgang der Wittwen, als durch den Tod Statt gefunden hätte.

Der jährliche Abgang der vorhandenen Wittwen iſt alſo $= \frac{W}{n} + \frac{W}{m}$.

Der Theil $\frac{W}{m}$ enthält bloſs die als Wittwen ſterbende in ſich. Dieſs iſt nicht einerley mit denen, die aus der ganzen Zahl der vorhandenen Wittwen, W, ſterben, weil zur letztern auch ſolche gehören, die in und nach der folgenden Ehe abgehen. Weiſs man $\frac{W}{m}$ unmittelbar aus der Erfahrung, ſo bedarf es hiebey keiner Berichtigung; muſs man aber aus dem gegebenen Alter der Wittwen und der Sterblichkeit für dieſs Alter den Werth von *m* ſuchen, ſo wird dieſer zweyte Theil des Abgangs $= \frac{W}{m} - \frac{W}{n\,m}$ ſeyn.

Da die Geſellſchaft im Beharrungsſtande iſt, ſo iſt die Zahl der jährlich von neuen aus den ſterbenden Ehen hinzukommenden Wittwen dem geſammten Abgange gleich.

Wenn keine Wiederheyrathung Statt findet, ſo iſt der *jährliche Abgang* $\frac{W'}{m}$, nämlich der Theil, der durch den Tod abgehet.

Aber

Aber die Zahl der jährlich von neuen hinzukommenden Wittwen aus den ſtehenden Ehen iſt auch ſo groſs als $\frac{W'}{m}$. Denn im Beharrungsſtande iſt auch W′ beſtändig; oder der Abgang $\frac{W'}{m}$ iſt nicht gröſser noch kleiner als der Anwachs aus den Ehen.

Folglich hat man

$$\frac{W}{n} + \frac{W}{m} = \frac{W'}{m}.$$

Und daraus $W' = \frac{m+n}{n} \cdot W.$

Nun iſt r. $W = E$

Folglich $W' = \frac{m+n}{n.\,r} \cdot E.$

## 8.

*Zuſatz.* Unter den Ehen rechnet man hier nur die erſten Ehen, und unter den Wittwen nur die es zum erſtenmale ſind; die ſich wieder verheyrathen, ſind nur die zur zwoten Ehe ſchreiten, die dritte, vierte u. ſ. f. wird nicht in Betracht gezogen. Eben ſo ſind hier die als Wittwen ſterben, nur die in dem erſten Wittwenſtande ſterben. Daher iſt W′ die Zahl der Wittwen, die aus den erſten Ehen entſtanden ſeyn würden, wenn keine Wiederheyrathung Statt gefunden.

Faſst man alle ſtehende Ehen zuſammen, die erſten und die zwoten u. ſ. f. und eben ſo alle Wittwen, ſie mögen es nach der erſten, oder nach der zwoten, oder dritten Ehe ſeyn, ſo iſt W′ die Anzahl von Wittwen, die aus ſo viel Ehen der Art aufgekommen ſeyn würden, wenn keine anders als durch den Tod davon abgegangen wäre. Das Verhältniſs dieſer Zahl zu der Zahl der Ehen iſt es, was man ſucht.

## 9.

Nach den von Hrn. *Guden* geſammleten (*) Erfahrungen iſt $r = 4$. Eher noch etwas gröſser als kleiner.

Ueber das Verhältniſs der wiederheyrathenden Wittwen im gemeinen Leben, zu der geſammten Anzahl der Wittwen iſt eine Tabelle beygebracht, davon ich hier nur das herſetzen will, was zunächſt zum Zwecke gehört.

Von

(*) Dieſe finden ſich theils in *der Sammlung deſſen, was wegen* der Calenbergiſchen *Wittwen - Verpflegungs-Geſellſchaft* bis Oſtern 1768 kund gemacht iſt, gröſstentheils aber in der vorhin angeführten *Theorie von Wittwencaſſen.*

Digitized by Google

| | | *Jährlich im Durchſchn. copulirt an Wittwen.* | *Es haben daſelbſt an Wittwen gelebt, 1778 und 1780.* | *Alſo iſt jährlich von den Wittwen verheyrathet* |
|---|---|---|---|---|
| Von 1755 bis 1778 ſind zu | *Hannover*, | 15, 5 | 548 | 1 von 35 |
| | *Walsrode* und eingepfarrten Höfen | 4 | 87 | 1 — 22 |
| | *Bockenem*, | 3 | 60 | 1 — 20 |
| | *Hoya.* | 2, 5 | 58 | 1 — 23 |
| Von 1764 bis 1778 zu | *Münden*, in den daſigen drey Kirchſpielen. | 3, 2 | 115 | 1 von 34 |
| Von 1764 bis 1780 zu | *Münder*, | 1, 65 | 58 | 1 — 31 |
| | *Springe*, | 1, 36 | 60 | 1 — 44 |
| | *Wallenſen*, | 2, 36 | 75 | 1 — 32 |
| | *Völckſen*, | 1, 06 | 37 | 1 — 37 |
| | *Hemmendorf.* | 1, 30 | 42 | 1 — 32 |
| | Zuſammen | 35, 93 | 1140 | 1 — 31, 7 |

Die Zahlen der vorhandenen Wittwen ſind bloſs aus den Jahren 1778 und 1780 genommen worden. Da wären noch mehrere Jahre zu vergleichen geweſen. Uebrigens kann man mit Hr. *Guden* wohl annehmen, daſs ſie nicht viel ſich ändern werden, und alſo für dieſe Oerter als die Zahlen im Beharrungsſtande angeſehen werden können.

Daraus kann $n = 32$ genommen werden.

Die Gröſse von *m* kann, bis Erfahrungen ſie näher beſtimmen, ſo angenommen werden, als wenn die Wittwen im Durchſchnitt 45 Jahr alt ſind. Dann iſt $m = 50$. Es ſterbe alſo Eine aus 50 jährlich als Wittwe.

So erhält man

$$W' = \frac{50 + 32}{32 \cdot 4} \cdot E = 0,64. E.$$

Das iſt auf 64 Wittwen kommen 100 Ehen, oder auf 1 Wittwe 1, 56, etwas über anderthalb Ehen.

Nimmt man das Durchſchnittsalter der Wittwen zu 50 Jahren etwan, und dann $m = 33$, ſo iſt $W' = \frac{65}{128} \cdot E$, das iſt nahe $\frac{1}{2} \cdot E$. Dann kommen 2 Ehen auf *eine* Wittwe.

## 10.

Will man noch näher zum voraus beſtimmen, was ſich von *vermiſchten* Geſellſchaften in Rückſicht dieſes Puncts etwan erwarten laſſe, ſo kommen folgende Sätze dabey in Betracht.

Wenn eine Geſellſchaft im Anfange nicht aus gleichen Ehepaaren, ſondern aus mehreren *ungleichen* entſtehet, bey denen nämlich das Alter des einen oder des andern Theils, oder beyder, verſchieden iſt von dem in den übrigen Paaren, ſo kann man ſich vorſtellen, die ganze Geſellſchaft beſtehe aus mehreren kleinern, die einzeln nur die gleichen Paare enthalten. Z. B. die

Paare,

Digitized by Google

Paare, wo der Mann 30, die Frau 25 Jahr iſt, machen einen Haufen für ſich; die, wo beyde 30 Jahre ſind, einen andern, u. ſ. f.

Wenn in einer ſolchen vermiſchten Geſellſchaft von jeder Claſſe von Paaren eben ſo viel neue eintreten, als das erſte Jahr zuſammenkamen, ſo wird ſie gleichförmig erneuert, oder recrutirt.

Die Zeit, in der die Wittwenzahl ein Gröſstes wird, und dann ihre Gröſse beſtändig behält; ingleichen ihr Verhältniſs zu den ſtehenden Ehen wird nach den obigen Sätzen leicht beſtimmt. *So lange noch die Altersergänzung der jüngſten Frau in der Geſellſchaft nicht verfloſſen iſt, wächſt die Wittwenzahl noch an.*

„Die Dauer des Ueberlebens der Frau, geſammlet „aus allen verſchiedenen Claſſen der Paare, und bey je„der in die Zahl der Paare multiplicirt; und auf dieſelbe „Art die Summe aller Verbindungsdauern der Claſſen ge„ſucht, ſo iſt jene Summe zu dieſer, wie die gröſste „Wittwenzahl im Beharrungsſtande, zu der Zahl der „ſtehenden Ehen.“

## II.

Wenn die anfängliche einförmige Geſellſchaft in der Folge jährlich einen immer gleichen Zuwachs erhält, aber ſo, daſs dieſer Zuwachs für jede beſondere Claſſe von Paaren nur $\frac{1}{m}$ der anfänglichen Zahl dieſer Paare ausmacht, ſo wird für ein unbeſtimmtes Jahr $x$, die

*Summe*

*Summe der Wittwen ſeyn:* 1) aus den anfänglichen Paaren, $\frac{{}^{x}A}{A}\left(1-\frac{{}^{x}B}{B}\right)$, und 2) aus den hinzugekommenen,

$$\frac{1}{m}\left(\frac{{}^{x-1}A}{A}\left(1-\frac{{}^{x-1}B}{B}\right)+\frac{{}^{x-2}A}{A}\left(1-\frac{{}^{x-2}B}{B}\right)\right.$$
$$\left.++\frac{{}^{1}A}{A}\left(1-\frac{{}^{1}B}{B}\right)\right).$$

Der *Anwachs* oder die *Abnahme* dieſer Zahl in dem nächſtfolgenden Jahre iſt

1) aus der anfänglichen Zahl

$$=\Delta\left(\frac{{}^{x}A.}{A}\left(1-\frac{{}^{x}B}{B}\right)\right).$$

2) Und aus den hinzu gekommenen Paaren

$$=\frac{1}{m}\cdot\frac{{}^{x}A}{A}\left(1-\frac{{}^{x}B}{B}\right).$$

Dieſs letztere Stück iſt immer ein Anwachs, eine poſitive Gröſse, ſolange nicht ${}^{x}A=0$ iſt, bis ins höchſte Alter der Frau. Allein das erſte Stück wird *negativ*, oder ein *Decrement*, ſobald $\frac{{}^{x}A}{A}\left(1-\frac{{}^{x}B}{B}\right)$ über das Maximum (§. 1.) hinaus iſt.

Daraus folgt, es könne, je nachdem die Gröſse *m* genommen wird, die Wittwenzahl ein Gröſstes werden, ehe ${}^{x}A=0$ wird, ohne beſtändig zu bleiben. Wenn aber die anfänglichen Paare alle abgeſtorben ſind, dann entſteht ſicher ein Beharrungsſtand.

Dritte

Digitized by Google

# Dritte Abhandlung.

## *Verſuch über das Riſico der Caſſe bey Verſorgungsanſtalten.*

### Erſter Abſchnitt.

*Allgemeine Grundſätze, wodurch das Riſico gefunden wird.*

I.

Bey einer *Verſorgungsanſtalt*, es ſey Verſorgung der Wittwen, oder eine jede andere, hat die Caſſe des Inſtituts ein gewiſſes *Riſico* auf ſich. Wenn richtig gerechnet iſt, ſo iſt auch der Werth deſſen, was ſie gewinnen kann, den man nach der Gröſse und nach Wahrſcheinlichkeit deſſelben ſchätzen muſs, ſo groſs als der *Werth des Verluſtes*. Das iſt, die *Erwartung* iſt auf beyden Seiten gleich. Allein es iſt doch eben darum ein *Riſico* vorhanden. Die Caſſe wagt etwas zu verlieren gegen die Erwartung etwas zu gewinnen, und ſo weit ſetzet ſie etwas aufs Spiel. Mann kann das nämliche ſagen von jedem Intereſſenten, der ſich auf ein ſolches Inſtitut einläſst. Auch dieſer kann gewinnen und verlieren. Wie groſs dieſs Riſico ſey, iſt, wie ſich von ſelbſt verſteht, eine erhebliche Frage. Denn davon hängt

hängt es ab, wie wichtig oder unwichtig die *Garantie* des Inſtituts ſey? Auch die Antwort auf eine andere Frage: *ob nicht die Geſellſchaft ſelbſt die Garantie gegen die einzelnen Mitglieder auf ſich nehmen könne, und ob ſie nicht dabey ſich beſſer ſtehe*, indem ſie alsdenn auch den Gewinn behält, als wenn ſie dieſen an einen Entrepreneur für jene Gewährleiſtung überlieſse?

Aber das Rifico iſt auch nicht leicht zu beſtimmen. So viel habe ich geſucht zu erhalten, daſs wo die Gröſse deſſelben nicht *genau* angegeben werden kann, ſich doch eine gewiſſe Grenze als ein *Maximum* finden laſſe, bis wohin es gehen könne. Die meiſten male kann dieſs für die Praxis genug ſeyn.

## 2.

Einige Sätze aus der allgemeinen Arithmetik muſs ich voran ſchicken.

*Lehnſatz* 1. *Es ſey ein Polynomium* $\Pi$ *in der Potenz m, oder* $\Pi^m = (a+bx+cx^2+dx^3+\ldots+tx^n)^m = A+Bx+Cx^2+\ldots+Kx^{m\mu-2}+Lx^{m\mu-1}+Mx^{m\mu}+Nx^{m\mu+1}+Ox^{m\mu+2}+\ldots+Tx^{nm}$, wo *m* und *n* *ganze Zahlen ſind. Die Differenz der Exponenten der Potenzen von x, iſt* 1. Ferner ſey

$$\mu = \frac{b+2c+3d+\ldots+nt}{a+b+c+d+\ldots+t}.$$ (Es iſt $\mu$ kleiner als *n*). Wenn zugleich $\mu$ eine *ganze* Zahl iſt, ſo kommt

kommt die Potenz $x^{\mu}$ vor in dem Polynomio $\Pi = a + bx + cx^2 + + hx^{\mu} + + tx^n$; und die Potenz $x^{m\mu}$ kommt vor in $\Pi^m$. Iſt $\mu$ keine ganze Zahl, ſo fehlt die Potenz $x^{\mu}$ zwar in $\Pi$, und auch kann $x^{m\mu}$ in $\Pi^m$ fehlen. Das heiſst dann, die Coëfficienten in dieſen Gliedern ſind $= o$. Aber das hindert die Allgemeinheit des gleich folgenden Satzes nicht.

Das Glied $hx^{\mu}$ in dem Polynomio $\Pi$ und $Mx^{\mu m}$ in $\Pi^m$ ſoll hier das *Durchſchnitts-Glied* genennet werden. Es iſt *nicht das mittlere*, weder der Ordnung, noch der Gröſse nach, obgleich es auch dieſs ſeyn kann. Es läſst ſich der Coëfficient deſſelben anſehen als der, in welchem der *Schwerpunct* der übrigen liegt. Jener hat nämlich die Aehnlichkeit mit dem Schwerpunct, daſs *wenn die vorhergehenden und nachfolgenden Coefficienten in* $\Pi$, *jeder in die Entfernung von jenem, (oder in die Differenz der Exponenten der veränderlichen Gröſse x) multiplicirt werden, die auf beyden Seiten entſtehende Summen ſolcher Producte einander gleich ſind.* Es ſey $\Pi = a + bx + + k.x^{\mu-2} + l.x^{\mu-1} + hx^{\mu} + px^{\mu+1} + qx^{\mu+2} + + + tx^n$. *Man multiplicire die Coefficienten, welche auf h folgen mit den natürlichen Zahlen nach der Ordnung, und nehme die Summe dieſer Producte,* $Q' = 1.p. + 2q + + + (n-\mu)t =$, *und eben ſo auch die Summe der Producte der vorhergehenden Coefficienten,*

*jeden*

Digitized by Google

*jeden multiplicirt in ſeine Entfernung von dem Gliede* $x^{\mu}$, *das iſt*, $1.l + 2.k + + + (\mu - 1).b + \mu.a, = Q$, *ſo iſt* $Q = Q'$. Dieſs erhellet aus der bekannten Art, wie der Schwerpunct in der Mechanik beſtimmet wird.

*Ferner aber iſt auch in* $\Pi^m$ *das Glied* $M x^{m\mu}$, *worinn die Potenz* $x^{m\mu}$ *vorkommt, das Durchſchnitts-Glied, und ſein Coefficient der Durchſchnitts-Coefficient in* $\Pi^m$, *was gleichfalls die Eigenſchaft eines Schwerpuncts hat. Es iſt nämlich die Summe der Producte* $1. L' + 2 K + + (m\mu - 1) B + m\mu. A = N + 2. O + + (n - \mu) m. T$; das iſt, *die Summen der Momente der Coefficienten ſind auf beyden Seiten einander gleich.*

Der Beweis dieſes Satzes kann mittelſt, des *Newtoniſchen Parallelogramms* gefunden werden. So viel ich weiſs, iſt dieſe Eigenſchaft der Coefficienten in den Polynomien noch von keinem bemerket worden. Es iſt etwas weitläuftig den ganzen Beweis herzuſetzen. Er erfordert auch in der Form, in der ich ihn habe, Sätze aus der Mechanik. Daher ich lieber einen andern haben mögte, der rein arithmetiſch wäre. Und weil ohnedieſs von dieſem Lemma in ſeiner völligen Allgemeinheit nicht leicht Anwendung gemacht werden wird, ſo kann ich um deſto mehr hier die Demonſtration weglaſſen.

3. Man

3.

Man unterſcheide in jedem Polynomio folgende *Summen.*

1) Die Summe aller *vor dem Durchſchnittsgliede vorhergehenden Coëfficienten eines Polynomii.* Dieſe Summe ſey C.

2) Die Summe *aller auf das Durchſchnittsglied folgenden Coëfficienten*, C'.

3) *Den Durchſchnitts-Coëfficienten* ſelbſt. Er ſey M.

4) *Die Summe aller Coëfficienten des Polynomii zuſammen*, C+C'+M=S.

5) Die Summe *aller Producte aus den natürlichen Zahlen* in ihrer Ordnung *in die vor dem Durchſchnittsgliede vorhergehenden Coëfficienten*, von dem nächſten Termino bey jenem an rückwärts, das iſt, *die Summe der vorhergehenden Coëfficienten-Momente*, Q.

6) *Die ähnliche Summe der Producte aus den natürlichen Zahlen in die auf das Durchſchnittsglied folgende Coëfficienten*, oder die *Momenten-Summe der nachfolgenden Coëfficienten* Q'. Es iſt nun Q'=Q.

7) *Die Summe der Producte aus allen Coëfficienten der Polynomien, den erſten*, der die veränderliche Gröſse nicht bey ſich hat, *ungerechnet, in die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 an*, jeden Coëfficienten nämlich in die zu ihm gehörige Zahl in der Reihe

der natürlichen Zahlen multiplicirt. Dieſe Summe ſey P.

8) *Eine ähnliche Summe von Producten aus den Coëfficienten des Polynomii ausgenommen den letzten, in die natürlichen Zahlen, von dem nächſtletzten angefangen*, P'.

Noch deutlicher in folgendem Schema. Die Coëfficienten des Polynomii ſollen in ihrer Ordnung ſeyn

$$a + b + + k + l + h + p + q + + s + t$$

das mittlere Glied h iſt der Coëfficient von $x^{\mu}$; b iſt der von x, und t der von $x^n$,

ſo iſt $a + b + + k + l = C$,

$$p + q + + t = C',$$

Ferner $C + C' + h = S$. Hier iſt *h* der Durchſchnitts-Coëfficient.

$$1.l + 2.k + + + \mu.a = Q$$

$$1.p + 2.q + + (n - \mu)t = Q'$$

und nach dem erſten Lemma iſt $Q = Q'$.

Ferner iſt $1.b + + (\mu - 2)k + (\mu - 1)l + \mu h + (\mu + 1)p + (\mu + 2)q + + nt = P$.

und $1.s + + (n - \mu)h + (n - \mu + 1)l + + n.a = P'$.

## 4.

*Zuſatz* 1. *Die Summe der Producte P, iſt jedesmal gleich dem Producte aus der Summe der Coëfficienten in die Zahl* $\mu$ (nach §. 2.) oder $P = \mu S$.

*Und*

*Und die Summe der Producte in P'* iſt $n$. $S - P = (n - \mu) S$, wie faſt unmittelbar einleuchtet.

*Dieſs gilt von jedem Polynomio*, ohne Ausnahme, auch von $(a + b x + c x^2 + + t x^n)^m$, wo $m$ eine ganze Zahl iſt.

*Zuſatz* 2. Sind *alle* Coëfficienten des Polynomii einander gleich, wie in $1 + x + x^2 + + x^n$, ſo iſt $\mu = \frac{1 + 2 + + n}{1 + n} = \frac{n}{2}$. Folglich kommt in $(1 + x + x^2 + + x^n)^m$ ſtatt $\mu$ nun $m \mu = \frac{mn}{2}$, als der Exponent der Potenz, deſſen Coëfficient M, *der Durchſchnitts-Coëfficient* iſt. Die Summe aller Coëfficienten iſt $(1+n)^m$. Folglich *die Summe der Producte aus den Coëfficienten von $x$, in die Reihe der natürlichen Zahlen von vorne an*, oder $P = \frac{mn}{2} \cdot (1 + n)^m$, und P auch $= P'$.

Bey $(a+bx)^m$, iſt $\mu = \frac{b}{a+b}$ für $a + b x$, und für $(a+bx)^m$ daher $m \mu = \frac{mb}{a+b}$. Folglich

$P = \frac{mb}{a+b} \cdot (a+b)^m$; und

$P' = \frac{ma}{a+b} (a+b)^m = ma(a+b)^{m-1}$.

Für $(1 + ax + bx^2)$, iſt $\mu = \frac{a+2b}{1+a+b}$.

Und für $(1+ax+bx^2)^m$ iſt $m\mu = m\left(\frac{a+2b}{1+a+b}\right)$.

Folglich $P = m. \frac{(a+2b)}{1+a+b} \cdot (1+a+b)^m =$
$m. (a+2b)(1+a+b)^{m-1}$, und
$P' = 2m(a+1).(1+a+b)^{m-1}$.

## 5.

*Zuſatz* 3. *Die Summen der Momente der Coëfficienten an beyden Seiten des Durchſchnitts-Coëfficienten, ſind einander gleich,* $Q = Q'$; *aber wenn ſtatt des Durchſchnittsgliedes das nächſtvorhergehende oder das nächſtfolgende genommen, und die Summe der Momente der Coëfficienten auf beyden Seiten geſucht wird, ſo iſt ihre Differenz der Summe aller Coëfficienten S gleich.* Es iſt wiederum dieſs leicht zu überſehen.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a+b++$ | $k+l+h+p+q++$ | $t. =$ | $S,$ | | | | | |
| $\mu,$ | $\mu-1,$ | $2,$ | $1,$ | $0,$ | $1,$ | $2,$ | $r$ | |
| $\mu-1,$ | $\mu-2,$ | $1,$ | $0,$ | $1,$ | $2,$ | $3,$ | $r+1.$ | |

Weil $1.p+2.q++r.t = l+2k++\mu a$, oder $Q' = Q$, ſo iſt $1.h+2p+3q++(r+1)t = Q+C'+h = \varphi'$.

Aber $1.k++(\mu-1)a = Q-C = \varphi$.
Alſo $\varphi'-\varphi = Q'-Q+C'+C+h = S$.

Geht man *zwey Glieder von dem Durchſchnittsgliede vorwärts oder rückwärts*, ſo iſt die Differenz der Momente $2S$, und ſo ferner. Geht man fort bis auf den erſten Coëfficienten $a$, ſo wird das Moment an einer Seite zu Nichts, und das an der andern Seite iſt $\mu S$, wie vorher.

6. *Lehn-*

## 6.

*Lehnſatz* 2. Ferner, *wenn die Summe der Coëfficienten dieſelbe bleibet, ingleichen auch die höchſte Potenz der Gröſse x dieſelbe, und dazu die Entfernung des Durchſchnittsgliedes von dem erſtern und letztern, ſo iſt die Summe der Coëfficienten-Momente gröſser, wenn alle Coëfficienten bloſs in dem erſten und letzten Gliede ſich befinden, und für die Zwiſchenglieder alle Nichts ſind, als bey jeder andern Vertheilung derſelben unter den geſetzten Bedingungen.*

Das iſt, wenn das Polynomium

$a + b\,x + + h\,x^{\mu} + + + t\,x^{n}$ verglichen wird mit einem andern von der Form $\alpha + \beta\,x^{n}$, ſo daſs $\alpha + \beta = (a + b + + h + + t)$, und auch

$\mu = \frac{n\,\beta}{\alpha + \beta} = \frac{b + 2c + + \mu\,h + + nt}{a + b + c + + t}$. (§. 2. Lemm. 1.) ſo ſind die *Momente der Coëfficienten* in dem letztern Polynomio $\alpha + \beta x^{n}$, nämlich $(n - \mu)\beta = \mu\alpha$, gröſser als die Momente der Coëfficienten in dem erſtern.

Ferner wenn *die Summe der Coëfficienten* dieſelbe bleibet, und eben ſo die *höchſte Potenz von x*, aber die *Stelle des Durchſchnittsgliedes* verſchieden ſeyn kann, *ſo iſt die Summe der Coëfficienten-Momente am gröſsten, wenn alle Coëfficienten in dem erſten und letzten Gliede in a und t beyſammen ſind, und wenn das Durchſchnittsglied gleich weit vom erſten und letzten Gliede abſteht,*

das iſt, wenn $\mu = \frac{n}{2}$, oder, *wenn das Polynomium von der Form* $\alpha + \alpha x^n = \alpha (1 + x^n)$ iſt.

Dieſs iſt unmittelbar klar. Denn, wo auch das Durchſchnittglied $h x^\mu$ iſt, ſo wird das Product, wenn alle auf einer Seite liegende Coëfficienten in die gröſste Entfernung von demſelben multiplicirt werden, gröſser als die vorigen Q und Q'. Oder, ſind alle auf $h x^\mu$ folgende Coëfficienten in das letzte Glied *t* gebracht, und alle vorhergehende nach *a*, ſo entſtehen zwey Producte $(n - \mu)\, t$, und $\mu\, a$, die gröſser ſind als vorher Q' und Q waren. Wird nun auch ſelbſt *h* der Coëfficient des Durchſchnittgliedes nach *a* und *t* geleget, ſo werden die Momenten-Summen noch gröſser. Sind aber die Momente nach dieſer Veränderung nicht auf beyden Seiten gleich, ſo kann von der einen Seite noch etwas auf die andere hinüber gebracht, alſo dieſe vergröſsert werden.

Und ſo wie nach bekannten Grundſätzen der Mechanik, bey einer gegebenen Summe von Gewichten, und einer gegebenen Länge des Hebels, an deſſen Endpuncten ſie anzubringen ſind, alsdenn die einander gleichen *Momente*, an beyden Seiten des Ruhepuncts, *die gröſsten ſind, wenn die Gewichte zu gleichen Theilen an den Enden des Hebels angebracht, und beyde gleich weit vom Mittelpunct entfernt ſind*, ſo giebt es auch hier in dem Fall die *gröſsten Coëfficienten-Momente*, wenn die gege-

gegebene Summe der Coëfficienten zu gleichen Theilen in das erſte und letzte Glied des Polynomii gebracht iſt, das iſt, wenn $a = t$, und $b = o$, $c = o$ und ſo ferner, die Summe $a + t$ aber eine *beſtändige* Gröſse iſt.

Alsdenn hat das Polynomium die Form $\alpha + \alpha x^n$, $= \alpha (1 + x^n)$, und es iſt $\mu = \frac{n\alpha}{2\alpha} = \frac{n}{2}$.

## 7.

*Lehnſatz* 3. *Wenn in dem Polynomio* $(a + b x + + t x^n)$, *(die Summe der Coëfficienten* $a + b + + t$ *immer dieſelbe geſetzt) die Summe der Momente der Coëfficienten auf beyden Seiten des Durchſchnittsgliedes am gröſten iſt*, wenn das Polynomium von der Form $\alpha (1 + x^n)$ iſt, *ſo iſt auch in dem Polynomio* $\alpha^m (1 + x^n)^m$ *die Summe der Momente auf beyden Seiten des Durchſchnittsgliedes gröſſer als in dem Polynomio* $\Pi^m = (a + b x + + h x^{\mu} + + t x^n)^m$. Es ſoll nämlich $\alpha + \alpha = a + b + + h + + t$ ſeyn.

Ingleichen *iſt in dem Polynomio von der Form* $(\alpha + \beta x^n)^m$ *die Summe der Momente der Coëfficienten gröſſer als in* $\Pi^m = (a + f x + + \beta x^n)^m$, *wenn* $\mu$ *in beyden dieſelbe Gröſse iſt, obſchon nicht* $= \frac{n \cdot m}{2}$.

## 8.

*Zuſatz.* Folglich iſt auch *der Quotient, der entſteht, wenn die Summe der Coëfficienten-Momente auf*

*einer Seite des Durchſchnittsgliedes, nämlich* $Q = Q'$, *durch die Summe aller Coëfficienten dividirt wird, gröſser in dem Polynomio* $\alpha^m (1+x^n)^m$, *als in* $\Pi^m = (a+bx^n)^m$, *wo a und b ungleich ſind, und in dem letztern gröſser als in dem Polynomio von der Form* $(a+bx++tx^n)^m$, *unter derſelben Bedingung, daſs* $a+b++t$, oder *die Summe aller Coëfficienten in dieſen Polynomien von verſchiedener Form, dieſelbe ſey, nämlich* $= 2\alpha = a+b$ in $(a+bx^n)^m$.

## 9.

*Lehnſatz* 4. *In dem Polynomio von der Form* $(1+y)^m$ *giebt es, wenn m eine gerade Zahl* $= 2r$, *einen gröſsten Coëfficienten, der in der Ordnung der* $r+1$*te iſt, wenn der erſte* 1 *mitgerechnet wird,* und dieſer iſt $= \frac{m.\ m-1\ .\ .\ .\ .\ (m-r+1)}{1.\ 2\ .\ .\ .\ .\ r}$. Er heiſse M, ſo iſt *dieſer zugleich der Durchſchnitts-Coëfficient, und die Summe der Momente der Coëfficienten auf beyden Seiten von* M, iſt $= \frac{m}{4}$ M.

Ferner. *Wenn m eine gerade Zahl iſt, alſo* $m-1$ *eine ungerade* $= 2r-1$, *ſo giebt es in* $(1+y)^{m-1}$ *zween gröſste Mittel-Coëfficienten; davon einer zu* $y^{r-1}$, *und der andere zu* $y^r$ *gehört, die von gleicher Gröſse ſind.* Einer davon werde bezeichnet durch M'. *Alsdenn iſt der Coëfficient, der zu* $y^{r-\frac{1}{2}}$ *gehört, und der hier der Durchſchnitts-Coëfficient iſt, auf deſſen beyden Seiten*

*Seiten die Coëfficienten-Momente gleich ſind,* $= o$. *Es fällt ſelbiger aber zwiſchen jene beyden gröſsten, die von ihm um* $\frac{1}{2}$ *entfernet ſtehen. Alsdenn iſt wiederum die Summe der Momente,* $Q = Q' = \frac{m.M'}{4}$.

*Beweis.* Beydes folgt aus den bekannten Geſetzen der Coëfficienten des *Binomii*, und weil der Beweis nicht ſehr weitläuftig iſt, will ich ihn herſetzen. Iſt 1) $m = 2r$ eine *gerade* Zahl, ſo ſind die Coëfficienten in $(1+y)^m$ bis auf den *mittlern gröſsten*, dieſen ausgeſchloſſen, in der Ordnung folgende,

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2} + + \frac{m.\overline{m-1}.\ldots.\overline{(m-r+2)}}{1.2\ldots.r-1}.$$

Es iſt die Summe aller Coëfficienten des Binomii, $= (1+1)^m = 2^m$, daher iſt die Summe jener Coëfficienten bis auf den gröſsten M, ohne dieſen,

$$= \frac{2^m - M}{2} = 2^{m-1} - \frac{M}{2}.$$

Wird nun jeder dieſer Coëfficienten von Anfang an, multiplicirt in eine Zahl der abnehmenden arithmetiſchen Reihe $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{2} - 1$, $\frac{m}{2} - 2, \ldots 1$, ſo geben die entſtehenden Producte die *Momente der Coëfficienten*, deren Summe $= Q$ iſt. Folglich iſt

$$Q = \frac{m}{2}\cdot\left(2^{m-1} - \frac{M}{2}\right) - \left(\frac{m}{1} + \frac{2.m.\overline{m-1}}{1.2}\right.$$

$$\left. + \frac{3.m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3} + ++ \frac{\overline{r-1}.m.\overline{m-1}\ldots\overline{m-r+2}}{1.2\ldots r-1}\right).$$

$$= \frac{m}{2} \cdot \left(2^{m-1} - \frac{1}{2} M\right) - \frac{m}{1} \left(1 + \frac{m-1}{1} + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdots \overline{m-r+2}}{1 \cdot 2 \cdots r-2}\right).$$

Der zweyte Factor des letztern abzuziehenden Stücks iſt die Summe der Coëfficienten von $(1+y)^{m-1}$ vom Anfang an bis auf den, der zu $y^{r-2}$ oder $y^{\frac{m}{2}-2}$ gehört. Allein weil $m-1$ hier eine *ungerade* Zahl iſt, ſo iſt der erſte von den beyden gröſsten Coëfficienten in $(1+y)^{m-1}$ derjenige, der zur Potenz $y^{\frac{2r-1-1}{2}} = y^{r-1}$ gehört, und folglich enthält jener Factor die Coëfficienten-Summe in $(1+y)^{m-1}$, vom Anfang an bis auf den erſten gröſsten, dieſen ausgeſchloſſen. Man bezeichne dieſen gröſsten durch M', jenen Factor aber durch F. Weil nun die Summe aller Coëfficienten in $(1+y)^{m-1} = 2^{m-1} = 2M' + 2F$, ſo iſt $F = \frac{2^{m-1} - 2M'}{2}$.

Daraus wird

$$Q = \frac{m}{2}\left(2^{m-1} - \frac{1}{2} M\right) - \frac{m}{2}\left(2^{m-1} - 2M'\right)$$

Nun iſt aber ferner $2M' = M$, weil

$$M = \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdots \overline{m-r+1}}{1 \cdot 2 \cdots \overline{r-1} \cdot r} = \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdots \overline{m-r+1}}{1 \cdot 2 \cdots \overline{r-1} \cdot \frac{m}{2}}, \text{ und}$$

$M' =$

$$M' = \frac{\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\ldots\cdot\overline{m-r+1}}{1.\ 2.\ \ldots\ \ldots\ r-1}.$$

Folglich iſt auch $Q = \frac{mM}{2} - \frac{mM}{4} = \frac{mM}{4}$.

2) In $(1+y)^{m-1}$ als einer *ungeraden* Potenz, giebt es *zwey mittlere gröſste Coëfficienten*, zwiſchen welchen der *Durchſchnitts-Coëfficient* in der Mitte liegt. Um alſo die Summe der Coëfficienten-Momente zu haben, müſſen die Coëfficienten der Potenz $m-1$, den erſten von den beyden gröſsten mitgenommen, deren Summe

$$1 + \frac{\overline{m-1}}{1} + \frac{\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}}{1.\ 2} + +$$

$$\frac{\overline{m-1}\ \ldots\ (m-\overline{r-1})}{1.\ \ldots\ r-2.\ r-1} = C$$ iſt, rückwärts multiplicirt werden durch die Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} + + \overline{r-1+\frac{1}{2}}$ oder durch $1-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2}, 3-\frac{1}{2} + + r-\frac{1}{2}$, und alſo von vorne angefangen, durch die Zahlen $r, r-1, r-2 \ldots 1$, wenn noch $\frac{1}{2}C$ davon abgezogen wird. Dieſs iſt daraus klar, weil *der erſte gröſste Coëfficient um* $\frac{1}{2}$ *von dem Durchſchnitts-Coëfficienten abſteht*, der nächſt vorhergehende um $1\frac{1}{2}$ u. ſ. f. bis auf den letzten $= 1$, der zu $x^0$ gehört, deſſen Entfernung $r-1+\frac{1}{2}$ iſt.

Die

Die Summe der Coëfficienten, den erſten der beyden gröſsten mitgerechnet, oder C iſt

$$= \frac{2^{m-1}}{2} = \frac{S}{2}.$$

Daher wird die *Summe der Momente*

$$Q = rC - \left(1.\frac{m-1}{1} + 2.\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.\quad 2} + + \overline{r-1}.\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}\ldots(m-r+1)}{1.\quad 2.\ \ldots\ r-2.\ r-1}\right) - \frac{1}{2}C.$$

$$= \left(r - \frac{1}{2}\right)C - (m-1)\left(1 + \frac{m-2}{1} + + \frac{\overline{m-2}.\overline{m-3}\ldots(m-r+1)}{1.\quad 2.\ \ldots\quad r-2}\right).$$

Der letzte Factor $1 + \frac{m-2}{1} + +$ iſt die Summe der Coëfficienten des Binomii von der geraden Potenz $m-2$ bis auf den gröſsten mittlern, dieſen ausgeſchloſſen. Denn in $(1+y)^{m-2}$ gehört der Coëfficient des mittlern Gliedes zu $y^{r-1}$, und iſt

$$= \frac{\overline{m-2}.\overline{m-3}\ldots.\overline{m-r}}{1.\quad 2\quad \ldots.\quad r-1}.$$

Daher iſt $\frac{\overline{m-2}.\overline{m-3}\ldots\overline{m-r+1}}{1.\quad 2.\ \ldots\quad r-2}$ der nächſt vorhergehende Coëfficient. Es ſey der mittlere gröſste Coëfficient in der Potenz $m-2$, $M''$, ſo bekommt man

$$Q = \left(r - \frac{1}{2}\right)C - (m-1)\left(\frac{2^{m-2} - M''}{2}\right)$$

$$=$$

Digitized by Google

$$= \frac{\overline{m-1}}{2} \cdot \frac{2^{m-1}}{2} - \frac{(m-1)}{2} \cdot 2^{m-2} + \frac{\overline{m-1}}{2} \cdot M''.$$

$$= \frac{m-1}{2} \cdot M''.$$

Aber weil $M'' = \frac{\overline{m-2} \cdot \overline{m-3} \cdot \ldots \cdot \overline{m-r}}{1. \quad 2. \ldots\ldots \quad r-1}$, und der erſte der gröſsten Coëfficienten in der ungeraden Potenz $m-1$, der oben $M'$ hieſs $= \frac{\overline{m-4} \cdot \overline{m-2} \ldots \overline{m-r+1}}{1. \quad 2. \ldots. \quad r-1}$.

ſo iſt $M'' : M' = m-r : m-1 = \frac{m}{2} : m-1.$

Folglich

$$\frac{m-1}{2} \cdot M'' = \tfrac{1}{4} \cdot mM' = \tfrac{1}{4}(m-1+1)M' = Q.$$

## 10.

*Lehnſatz* 5. *In dem Polynomio* $(a+by)^n$ *wo* $n$ *ein Vielfaches von* $a+b$ *iſt, dafür* $mt$, *wenn* $t = a+b$, *genommen werden kann, iſt der Durchſchnitts-Coëfficient derjenige, der zu* $y^{bm}$ *gehört, und wenn dieſer, der zugleich der gröſste Coëfficient iſt, durch M bezeichnet wird, ſo iſt die Momenten-Summe der Coëfficienten auf beyden Seiten* $= \frac{ab}{(a+b)^2} \cdot n.M.$

*Beweis.* Es iſt $(a+by)^n = (a+by)^{tm} = a^{tm}\left(1 + \frac{b}{a}y\right)^{tm}$, und wenn $\frac{b}{a} = h$, $(a+by)^n = a^{tm}.(1+hy)^{tm}$.

Weil

Weil $\frac{b}{a+b} = \mu$, und $t = a+b$, ſo iſt $\mu t m = t m. \frac{b}{a+b} = b m$ der Exponent der Potenz des Durchſchnittsgliedes in $(a+by)^n$. Der Coëfficient alſo, der zu $y^{bm}$ gehört, iſt der Durchſchnitts-Coëfficient. (nach *Lehnſ.* 1. §. 2.)

In dieſem Coefficienten iſt auch $h^{bm}$ enthalten, oder $\frac{b^{bm}}{a^{bm}}$, und weil $h^{bm}. a^{tm} = a^{(t-b)m}. b^{bm} = a^{am}. b^{bm}$, ſo iſt dieſs derſelbe Coëfficient, in welchem die Exponenten der Potenzen von *a* und *b*, dieſen Gröſsen ſelbſt proportional ſind, und der iſt nach den bekannten Geſetzen des Binomii der *gröſste Coëfficient in dem entwickelten Binomio* $(a+b)^{tm}$.

Nun iſt die Summe der Coëfficienten in $a^{tm}(1+hy)^{tm}$ bis auf den gröſsten, dieſen ungerechnet,

$$a^{tm}. \left(1 + \frac{mt.h}{1} + \frac{mt.\overline{mt-1}}{1.\ 2}. h^2 + + \frac{mt.\overline{mt-1}.\ldots.(mt-\overline{bm-2})}{1.\ 2.\ldots.\overline{bm-1}}. h^{bm-1}\right)$$

$= a^{tm}. C.$ Dieſe einzeln multiplicirt mit den Zahlen der arithmetiſchen Reihe $bm, \overline{bm-1}\ldots. 1.$ von vorne an, jeden mit ſeiner zugehörigen Zahl, giebt die *Summe der Momente der Coëfficienten*, oder Q

$$= a^{tm}\left(bm.C - \left(mth + 2.\frac{mt.\overline{mt-1}}{1.\ 2}. h^2\right.\right.$$

+

$$+ + \overline{bm-1} \cdot \frac{mt \cdot \overline{mt-1} \ldots \overline{mt-bm+2}}{1 \cdot 2 \ldots \overline{bm-2} \cdot \overline{bm-1}} \cdot h^{bm-1} \Big) \Big)$$

$$= a^{tm} \cdot \Big( bmC - mth \Big( 1 + \frac{\overline{mt-1}}{1} h + +$$

$$\frac{\overline{mt-1} \cdot \overline{mt-2} \ldots (mt - \overline{bm-2})}{1 \cdot 2 \ldots bm-2} \cdot h^{bm-2} \Big) \Big)$$

$= a^{tm} (bmC - mt.h.C')$, wo C' die *Summe der Coëfficienten* in $(1+hy)^{mt-1}$ iſt bis auf das Glied, worinn $h^{bm-1}$ vorkommt, dieſs letztere ungerechnet. Setzet man auch dieſes letztere hinzu, und macht

$$C' + \frac{\overline{mt-1} \cdot \overline{mt-2} \ldots \overline{mt-bm+1}}{1 \cdot 2 \ldots \overline{bm-2} \cdot \overline{bm-1}} \cdot h^{bm-1}$$

$= C' + M'$, ſo iſt nach dem bekannten Geſetz der Coëfficienten $hC' + C' + M' = C$. *Denn wenn man die Summe der Coëfficienten eines Binomii von der Form* $(1+hy)^{mt-1}$ *bis zu einem gewiſſen Gliede hin nimmt, und eben dieſelben Coëfficienten auſser dem lezten durch h multiplicirt, ſo giebt die Summe jener, und der letztern mit h multiplicirten, die Summe der Coëfficienten in der nächſt höhern Potenz* $(1+hy)^{mt}$, *bis an daſſelbe beſtimmte Glied hin.*

Alſo iſt $C' = \frac{C - M'}{h+1}$

Folglich wird $\frac{Q}{a^{tm}} = bmC - mthC'$

$= bmC - mt.h. \left( \frac{C - M'}{h+1} \right)$ =

$$= \frac{(b\,m\,h + b\,m - m\,t.\,h)\,C + m\,t\,h\,M'}{h+1} \cdot$$

Weil aber $h = \frac{b}{a}$, und $t = a+b$; ſo iſt auch

$$\frac{Q}{a^{tm}} = \left(b\,m\left(\frac{b}{a}+1\right) - \frac{b\,m}{a}\left(a+b\right)\right) \cdot \frac{C}{h+1}$$

$$+ \frac{m\,t.\,h\,M'}{h+1} = \frac{m\,t.\,h.\,M'}{h+1} \cdot \quad \text{Nun iſt auch}$$

$$M' = \frac{\overline{mt-1} \cdots \overline{mt-bm+1}}{1 \quad \cdots (bm-1)} \cdot h^{bm-r}$$

und der *mittlere gröſste Coëfficient* in $(1+hy)^{mt}$, oder

$$M'' = \frac{m\,t.\ \overline{m.\,t-1} \cdots \overline{mt-bm+1}}{1. \quad 2. \ldots (bm-1).\ bm} \cdot h^{bm}.$$

Alſo iſt $M' : M'' = 1 : \frac{m\,t}{bm} \cdot h$.

Folglich $\frac{Q}{a^{tm}} = \frac{b\,m}{h+1} \cdot M''$.

Es iſt aber $M''.\ a^{tm}$ *der gröſste Coëfficient des Binomii* $a^{tm}\left(1 + \frac{b}{a}y\right)^{tm}$ oder in $(a+by)^{tm}$, alſo M.

Daher $Q = \frac{b\,m}{h+1} \cdot M. = \frac{b}{(h+1)\,t} \cdot m\,t.\,M.$

$$= \frac{b}{\left(\frac{b}{a}+1\right)(a+b)}\,m\,t.\,M = \frac{a\,b}{(a+b)^2}\,m.\,t.\,M$$

$$= \frac{a\,b}{(a+b)^2}\,n.\,M.$$

## II.

*Lehnſatz* 6. *Der gröſste Coëfficient in dem Binomio* $(\alpha+\alpha y)^{tm}$ *ſey* $= M$. *Der gröſste im Binomio* $(a+by)^{tm}$ $= M'$ und $2\alpha = a+b = t$, *ſo wird* $M : M' = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} : 1$ *ganz nahe, wenn m eine ſehr groſse Zahl iſt.*

*Beweis.* Es ſey der *Zahlen-Coëfficient*, ſo weit nämlich der Coëfficient allein von dem Exponenten der Potenz $t\,m$ abhängt, in $M = K$, und der in $M'$ ſey $K'$, ſo iſt $M : M' = \alpha^{tm} . K : a^{am} . b^{bm} . K'$.

Man ſetze $\alpha = 1$; $a = 1+x$; $b = 1-x$, ſo wird

$$\alpha^{tm} : a^{am} . b^{bm} = 1 : (1+x)^{m(1+x)} . (1-x)^{m(1-x)}.$$

Das Verhältniſs $K : K'$ iſt das Verhältniſs des *gröſsten Termini im Binomio* $(1+1)^{tm}$, *zu dem Coëfficienten, der um mx von dieſem entfernt iſt.* Denn *jener iſt der Coëfficient des Gliedes der Potenz* $y^{m}$; *dieſer des Gliedes* $y^{m(1-x)}$. Der Abſtand zwiſchen beyden iſt alſo $m - m+mx = mx$. Nun iſt nach den Unterſuchungen, die *Moivre* darüber angeſtellet hat (in den *Miſcellan. Analyt.* p. 103.) das Verhältniſs

$$K : K' = (m+mx-1)^{m+mx-\frac{1}{2}} . (m-mx-1)^{m-mx-\frac{1}{2}} : \overline{1+x} : m^{2m},$$

wenn $m$ eine groſse Zahl, und $m\,x$ nicht gar zu groſs iſt, denn ſonſt muſs dieſer Ausdruck

noch eine Correction haben, die aber wenigstens zu der gegenwärtigen Absicht nicht in Betracht kommen darf. (*Miscell. analyt. suppl.* p. 18.)

Daraus wird

$$K:K' = (m+mx-1)^{m+mx} \cdot (m-\overline{mx-1})^{m-mx} \cdot \left(\frac{m-\overline{mx-1}}{m+mx-1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x) : m^{2m}$$

$$= m^{m(1+x)} \cdot \left(1+x-\frac{1}{m}\right)^{m(1+x)} \cdot m^{m(1-x)} \cdot \left(1-x-\frac{1}{m}\right)^{m(1-x)} \cdot \left(\frac{m-\overline{mx-1}}{m+mx-1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} : m^{2m}, = \left(1+x-\frac{1}{m}\right)^{m+mx} \cdot \left(1-x+\frac{1}{m}\right)^{m-mx} \cdot \left(\frac{1-x+\frac{1}{m}}{1+x-\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x) : 1.$$

Dafür kann, wenn $m$ eine sehr grosse Zahl ist, genommen werden

$$(1+x)^{m+mx} \cdot (1-x)^{m-mx} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x) : 1.$$

Folglich wird das Verhältniss $M : M' =$

$$\frac{(1+x)^{m+mx} \cdot (1-x)^{m-mx}}{(1+x)^{m+mx} \cdot (1-x)^{m-mx}} \cdot (1-x^2)^{\frac{1}{2}} : 1$$

$$= (1-x^2)^{\frac{1}{2}} : 1.$$

*Zusatz.*

Digitized by Google

*Zuſatz.* Es ſey die *Summe der Momente* in $(\alpha+\alpha y)^{tm} = Q$, ſo iſt $Q = \frac{m\,t.\,M}{4}$ · §. 9. Die *Summe der Momente* in $(a+by)^{tm}$ ſey $= Q'$, ſo iſt

$$Q' = \frac{ab}{(a+b)^2} \cdot m\,t.M' (\S.\,9.) = \frac{1-x^2}{4} \cdot m\,t.\,M'.$$

Daher $Q : Q' = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} : 1-x^2 = 1 : (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Weil x jederzeit ein *eigentlicher Bruch* iſt, ſo iſt Q *auch in jedem Fall gröſſer als* Q'. Der allgemeine Ausdruck des Verhältniſses der Zahlen-Coëfficienten K : K' nach *Moivre*, iſt nur eine Näherung und giebt nicht K = K' wenn m = o wird, wie es doch ſeyn ſollte. Der lezte Ausdruck, der hier aus dem *Moiviſchen* entſtanden iſt, nachdem $\frac{1}{m} = o$ geſetzet worden, kann auch ohne eine merkliche Abweichung in ſolchen Fällen gebraucht werden, wo *m* nur eine *mäſſig groſſe* Zahl iſt.

Sonſt iſt auch leicht aus den Geſetzen der Coëfficienten des Binomii herzuleiten, daſs

$$K : K' = \frac{\overline{m+1} \cdot \overline{m+2} \cdots \overline{m+mx}}{(m+1-mx)(m+2-mx)\ldots(m+mx-mx)}$$

ſey, oder umgekehrt

$$K' : K = \left(1-\frac{mx}{m+1}\right)\left(1-\frac{mx}{m+2}\right)\cdots\left(1-\frac{mx}{m+mx}\right).$$

Dieſer Ausdruck kann gebraucht werden, wo *m* nur *klein* iſt, und iſt *genau richtig*.

## 12.

*Lehnſatz* 7. *In dem Polynomio* $(a+by)^{tm}$ *ſey der Durchſchnitts-Coëfficient* $M'$, *und in dem Polynomio* $(b+by)^{\tau\mu}$ *wo* $\tau\mu = \mu(b+b)$, *auch* $= mt = m(a+b)$ *genommen wird, ſey derſelbe* M, *ſo iſt die Summe der Coëfficienten-Momente in dem erſten* $Q' = \frac{ab}{(a+b)^2} \cdot mt.M'$, *und in dem andern* $Q = \frac{\mu\tau M}{4}$ (nach *Lehnſatz* 4 und 5.) Alſo, weil $mt = \mu\tau$, auch

$$Q' : Q = \frac{ab}{(a+b)^2} \cdot M' : \frac{M}{4}.$$

Aber $M' = \frac{mt.\overline{mt-1}\ldots\overline{mt-bm+1}}{1.\quad 2.\quad \ldots\quad bm} \cdot a^{am} \cdot b^{bm}$.

und $M = \frac{\overline{\mu\tau}\cdot\overline{\mu\tau-1}\ldots\overline{\mu\tau-\frac{1}{2}\mu\tau+1}}{1\quad 2.\ \ldots\ \ldots\ \frac{1}{2}\tau\mu} \cdot b^{\tau\mu}$.

Daraus erhält man

$M' : M = \left(\frac{a}{b}\right)^{am}$. $K' : K$. in §. 11., und

$$Q' : Q = \frac{4ab}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{am} \cdot \frac{K'}{K}.$$

Der Factor $\frac{K'}{K}$ iſt hier jedesmal ein *eigentlicher Bruch*, und ſo groſs als in §. 11.

## 13.

Noch will ich folgende Lemmata *von den Coëfficienten eines Polynomii von der Form* $(1+x+x^2+\ldots+x^n)^m$ *anfügen.* Denn ob ich gleich zu der vorhandenen Abſicht

Digitized by Google

Abſicht davon keinen beſondern Gebrauch machen werde, ſo ſind ſie doch anwendbar in andern Fällen. Die Beweiſe bleiben aber der Weitläuftigkeit wegen weg.

*Lehnſatz* 8. *In dem Polynomio* $(1+x+x^2++x^n)^m$ *kann* 1) *jeder Coëfficient für ſich auf folgende Art, im Allgemeinen, ausgedruckt werden.* Die Glieder der Reihe mit ihren Coëfficienten werden nach den Potenzen von x geordnet, wobey es aber einerley iſt, ob man von der höchſten Potenz $x^{nm}$ anfängt, und bis $x^0$ zurück geht, oder umgekehrt von $x^0$, wie gewöhnlich, bis $x^{nm}$.

Es ſey z die Ordnungszahl der Coëfficienten, der *nnmerus termini*, der angiebt, der wie vielſte ſelbiger in der Reihe iſt, den erſten ſchon mitgerechnet.

Ferner $S^1.\overline{z}$ bezeichne die Zahl z ſelbſt, oder die *erſte Summe der Einheiten bis* z, das iſt, z ſey eine aus der Reihe der *natürlichen Zahlen*. Dann $S^2.\overline{z}$ *die Summe der natürlichen Zahlen*, oder die *zwote Summe der Einheiten*, bis z, das iſt eine *Trigonalzahl*. So weiter $S^3.\overline{z}.$ eine aus der Reihe der *Pyramidalzahlen*, das iſt, *die dritte Summe der Einheiten bis* z; und im allgemeinen $S^{m-1}.\overline{z}$, $S^m.\overline{z}$, die *(m — 1)te und mte Summe der Einheiten* bis z.

Noch ſetze man $n+1 = p$.
Alsdenn iſt *jeder Coëfficient der in der Ordnung der zte iſt*, oder *k*,

$$= S^{m-1}.\overline{z} - \frac{m}{1} \cdot S^{m-1}.\overline{z-p.}$$

$$+ \frac{m.\overline{m-1}}{1.\ 2} \cdot S^{m-1}.\overline{z-2p.} -$$

$$\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.\ 2\ 3} \cdot S^{m-1}.\overline{z-3p} + -$$

$$\frac{m.\overline{m-1}\ldots\overline{m-h+1}}{1.\ 2.\ \ldots\ h} \cdot S^{m-1}\ldots\overline{z-h.\,p.}$$

so lange fortgesetzt bis $z - hp$, wo $h$ immer eine ganze Zahl seyn muſs, entweder $= o$, oder *negativ* wird. Die Zeichen der Theile in diesem Ausdruck wechseln mit einander ab.

Der *erste* Coëfficient ist jedesmal 1, denn z ist $= 1$, daher $S^{m-1}.1$ auch $= 1$.

Der *letzte* Coëfficient für $z = mn + 1$ ist ebenfalls $= 1$.

Der *mittlere Coëfficient* der $\frac{mn}{2}$te ist zugleich der *Durchschnitts- Coëfficient*, wenn *m* oder *n* eine *gerade* Zahl ist; wenn $\frac{mn}{2}$ keine *ganze* Zahl ist, so giebt es *keinen Durchschnitts- Coëfficienten* in der Reihe selbst, sondern dieser fällt zwischen zween andere, und zwar in der Mitte, welche beyde von gleicher Gröſse und die *mittlern* Coëfficienten der Reihe sind. Die *mittlern* Coëfficienten sind auch die *gröſsten*, wie in dem Binomio.

Einen

Einen andern Ausdruck für den Coëfficienten hat *Moivre* gegeben, (in *Miſcellan. Analyt.* L. VII. Cap. 17.) Wenn mir dieſer damals eingefallen wäre, als ich den meinigen ſuchte, ſo würde ich meine Mühe geſpart haben. *Moivres* Formel kann in die hier gegebene verändert werden, und das beweiſet deſto mehr die Richtigkeit von beyden. Daſs er die ſeinige auf einem ganz andern und vielleicht nähern Wege gefunden habe, als ich die meinige, kann jedem die Vergleichung zeigen. Uebrigens war mir die meinige nicht unbequem, als ich für die *Summe der Momente der Coëfficienten* auf beyden Seiten des *Durchſchnitts-Coëfficienten* die allgemeine Formel ſuchte.

## 14.

a) *Dieſe letztgedachte Momenten-Summe iſt*, a) im Fall $m n + 1$ eine *ungerade* Zahl, und alſo nur *Ein gröſster Coëfficient* in der Mitte des Polynomii da iſt,

$$= \frac{m\left(\frac{n}{2}+1\right)}{m+1} \cdot S^{m} \cdot \overline{\tfrac{1}{2} m n}.$$

$$- \frac{m.\left(\frac{n}{2}+1\right)-p}{m+1} \cdot \frac{m}{1} \cdot S^{m} \cdot \overline{\frac{m n}{2} - p}.$$

$$+ \frac{m.\left(\frac{n}{2}+1\right)-2p}{m+1} \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{\overline{m-1}}{2} \cdot S^{m} \cdot \overline{\tfrac{1}{2} m n - 2p} +$$

$$\frac{m.\left(\frac{n}{2}+1\right)-\nu.p}{m+1} \cdot \frac{m.\overline{m-1}\ldots\overline{m-\nu+1}}{1.\ 2\ldots\ \nu} \cdot S^{m} \cdot \overline{\tfrac{1}{2} m n - \nu p}$$

ſo lange als $\frac{1}{2} m n - \nu p$, oder weil $p = n + 1$, auch $\frac{1}{2} m n - \nu n - \nu = (\frac{1}{2} m - \nu) n - \nu$ noch eine *poſitive* Gröſse iſt.

b) Für den Fall, wenn $m n + 1$ eine *gerade* Zahl iſt, ſchreibe man ſtatt $\frac{m n}{2}$ in der vorigen Formel, $\frac{m n + 1}{2}$, und ziehe von der ſo geänderten Formel am Ende noch ab $\frac{(1+n)^m}{4}$, ſo hat man *die Summe der Momente für dieſen zweyten Fall.*

Um mit einem Beyſpiele dieſe Ausdrücke zu erläutern, ſey $n = 5$, $m = 4$, ſo ſind die Coëfficienten des *Polynomii* $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4$ in der Ordnung 1, 4, 10, 20, 35, 56, 80, 104, 125, 140, 146. Der letzte 146 iſt der höchſte mittlere, von welchem an ſie wiederum in umgekehrter Ordnung abnehmen. In allen ſind ihrer $m n + 1 = 21$.

Wird nun jeder multiplicirt in ſeinen Abſtand von dem Durchſchnitts-Coëfficienten, der hier auch der mittlere iſt, und dieſe Producte in eine Summe gebracht, ſo bekommt man

$Q = 10 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 20 + 6 \cdot 35 + 5 \cdot 56 + 4 \cdot 80 + 3 \cdot 104 + 2 \cdot 125 + 1 \cdot 140 = 1778$.

Weil nun $\frac{m n}{2} = 10$, und $p = n + 1 = 6$ iſt, ſo geben die erſten beyden Glieder der Formel für den Fall, wo $m n + 1$ ungerade iſt, dieſe Summe ſchon. Die Formel

Formel bricht hier ab, denn in dem dritten Gliede kommt $\frac{1}{2}mn - 2p$ vor, was $10 - 12$, alſo negativ, iſt. Die Formel giebt hier alſo

$$\frac{10+4}{5} \cdot S^4{}_{\overline{10}} - \left(\frac{10+4-6}{5}\right)\frac{4}{1} \cdot S^4{}_{\overline{4}}.$$

$$= \frac{14}{5} \cdot \frac{10.\,11.\,12.\,13}{1.\,2.\,3.\,4} - \frac{8}{5} \cdot 4 \cdot \frac{4.\,5.\,6.\,7}{1.\,2.\,3.\,4}.$$

$$= 2002 - 224 = 1778.$$

Ferner ſey $m = 3$, und $n$ wiederum $= 5$, ſo iſt $mn + 1 = 16$, eine *gerade* Zahl, und $p = 6$ und $\frac{(1+n)^m}{4} \cdot = \frac{6^3}{4} = 54.$

Die allgemeine Formel für dieſen Fall giebt

$$\frac{8+3}{4} \cdot S^3{}_{\overline{8}} - \frac{11-6}{4} \cdot 3 \cdot S^3{}_{\overline{2}} - 54.$$

$$= \frac{11}{4} \cdot \frac{8.\,9.\,10}{1.\,2.\,3} - \frac{5.\,3}{4} \cdot \frac{2.\,3.\,4}{1.\,2.\,3} - 54 = 261.$$

Es ſind aber die Coëfficienten des Polynomii $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$, bis auf die Mitte hin, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, welche durch 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 multiplicirt, Producten-Summe geben 315. In allen ſind $mn + 1 = 16$ da; davon die beyden mittlern von gleicher Gröſse 27 ſind. Die Summe der erſten Hälfte derſelben 8 macht 108. Da nun jeder von dieſen um $\frac{1}{2}$ weniger von dem *Durchſchnitts-Coëfficienten*, der zwiſchen die beyden gröſsten in die Mitte fällt, entfernt iſt, als in den obigen Momenten angenommen worden, ſo ſollte jeder in $\frac{1}{2}$ weniger multiplicirt ſeyn,

als geſchehen iſt; daher muſs von 315 wiederum $\frac{1}{2}$. 108 = 54 abgezogen werden. Das giebt denn wie vorher 261, für $Q_2$ als das Moment der Coëfficienten.

## 15.

Dieſe Sätze von den Coëfficienten der Polynomien ſind es, wodurch das *Rifico einer Caſſe bey Verſorgungsanſtalten* berechnet werden kann. Einige von ihnen ſind von andern ſchon bewieſen worden, wie die, welche zu dem Binomio gehören, die übrigen habe ich ſelbſt ſuchen müſſen. Ich erinnere hiebey im Vorbeygehen, wie wichtig die *analytiſche Unterſuchung der Polynomiorum zur Berechnung der Wahrſcheinlichkeiten ſey.* Hier wird man davon ein Beyſpiel haben. Könnte man die Coëfficienten eines Polynomii $(a+bx+cx^2++qx^n)^m$ beſtimmen, was in einzelnen Fällen, wo *n* und *m* groſse Zahlen ſind, immer noch eine mühſame Rechnung erfordert, ſo erheblich auch die Erleichterung iſt, die Hr. Prof. *Hindenburg* in ſeiner vortrefflichen *Unterſuchung des Polynomii* (*) gelehret hat, ſo würde ſich die Zahl der *möglichen Fälle angeben laſſen, in denen mit jeder gegebenen Menge von Würfeln eine gewiſſe Summe geworfen werden kann.* Ein Problem, um deſſen Auflöſung

(*) *Infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati Hiſtoria, Leges ac Formulae.* Autore *Carol. Friederic. Hindenburg.* Goettingae 1779.

Auflöſung man ſich in beſondern Fällen viele Mühe gegeben hat. Man nehme nämlich *prismatiſche Würfel* von ſo vielen Seiten, als die Summe der Coëfficienten in $a+bx+cx^2++qx^n$, ausmacht, das iſt $=a+b+c++q$. Von dieſen Seiten ſetze man *a* mit *o*; *b* mit 1; *c* mit 2; und ſo weiter *q* mit der Zahl *n* bezeichnet. Giebt es nun *m* ſolcher Würfel, womit auf *einmal* geworfen werden ſoll, oder nimmt man *m* Würfe nach einander mit *Einem* Würfel, und es iſt die Frage, auf wie manche verſchiedene Arten eine beſtimmte Zahl von Augen, entweder auf einmal in Einem Wurf mit *mehrern Würfeln*, oder in *mehreren* wiederholten *Würfen* mit *Einem Würfel*, fallen könne, ſo findet man *die Zahl der Fälle für die beſtimmte Zahl der Augen* o, 1, 2, ... *in den Coëfficienten des Polynomii* $(a+bx+cx^2++qx^n)^m = A+Bx+Cx^n++Tx^{nm}$, *die zu den Potenzen der Gröſse x gehören*, deren Exponenten die zu werfenden Zahlen ſind. So giebt A als der Coëfficient von $x^o$ an, in wie vielen Fällen *o* fallen könne; B enthält die Fälle, in denen 1; C in denen 2, und ſo weiter, T die, in denen *m n* fallen können. Denn es iſt klar, daſs ſo vielmal eine Potenz von x, als $x^\mu$ aus der Multiplication von $x^o$, $x^1$, $x^2$ und ſo weiter, entſtehen kann, ſo vielmal kann der Exponent derſelben $\mu$ aus der Verbindung der Zahlen o, 1, 2, 3, ... $\mu$, aus einem von ihnen, aus zweyen, dreyen u. ſ. f. gemacht werden. Und dieſe Fälle ſind alle in dem Coëfficienten von $x^\mu$ begriffen.

Wenn

Wenn $a = 1 = b = c$ u. ſ. f., und $n = 5$, ſo hat man in $(1+x++x^5)^m$, die Coëfficienten für die gewöhnlichen cubiſchen Würfel von ſechs Seiten, wenn die Seiten mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet ſind. Gewöhnlich fehlt die Null, und die Zahlen von 1 bis 6 ſind da; aber das ändert nur bloſs etwas in den Zahlen, die man werfen kann. Die niedrigſte iſt alsdenn nicht $o$, ſondern $m$, und die höchſten Augen ſind $(n+1)\,m$ anſtatt $n\,m$. Die Zahlen für die möglichen Würfe bleiben in ihrer Ordnung dieſelben.

Daraus wird denn auch die *Wahrſcheinlichkeit des Falls beſtimmt, daſs eine gewiſſe Summe fallen werde.* Dieſe iſt $\frac{B}{(a+b++q)^m}$ für die Fälle daſs 1 falle; $\frac{M}{(a+b++q)^m}$ dafür daſs $\mu$ falle, u. ſ. w. *Der Coëfficient* nämlich *dividirt durch die Summe aller Coëfficienten iſt ſo viel als die Summe der möglichen Fälle, in denen eine beſtimmte Begebenheit erfolgt, dividirt durch die Summe aller überhaupt möglichen Fälle.*

Dieſer auch ſchon bekannte Gebrauch des Polynomii iſt darum zu bemerken, weil er auf den führt, den ich nachher davon machen werde. Die Rechnung der Wahrſcheinlichkeiten ward Anfangs von *Hugenius*, und nachher noch von *Jacob Bernoulli* und *Moivre* nur auf Hazardſpiele angewandt. Wäre das der Nutzen alle, ſo mögte man Recht haben, für difficiles

nugas

Digitized by Google

nugas ſie zu halten, und dann auch die Beſchäfftigung mit dem Polynomio für eben ſo was. Aber weit gefehlt. Sie iſt ſehr erheblich und brauchbar. Sie erſtrecket ſich auf alle Aufgaben, *wo aus der gegebenen Wahrſcheinlichkeit, daſs ſich dieſes und jenes, ein drittes, ein viertes* u. ſ. f. *in einem einzelnen Fall eräugnen werde, die Wahrſcheinlichkeit von dem zu finden iſt, was in mehreren Fällen zuſammengenommen ſich eräugnen kann.* Eine allgemeine Speculation ſey nur eine richtige Speculation. Sie mag vor der Hand gar nicht, oder nur auf Spielwerk, oder nur auf erdichtete Gegenſtände anwendbar ſcheinen. Es wird ſich ſchon finden, daſs ſie es auch bey wirklichen, intereſſanten und edlen Objecten ſey, und dann für die Praxis wichtig werde.

## Zweyter Abſchnitt.

### *Anwendung dieſer allgemeinen Sätze zur Berechnung des Riſico bey Verſorgungsanſtalten.*

### 16.

*Erſter Satz. A kaufe eine Rente, die vom Leben oder Tode einer oder mehrerer Perſonen abhängt.* Man ſetze, der *wirkliche Erfolg* könne ſo ſeyn, daſs die Caſſe gar nichts für dieſe Rente zu zahlen habe, (oder der wirkliche Werth könne o ſeyn.) Aber es ſey auch möglich, daſs ſie die Gröſse AB (Fig. 2.) habe, und dieſs ſey ihr *möglich gröſster Werth.* Es werde AB in *m*

gleiche

gleiche Theile getheilet, und die wirklich zu zahlende Rente könne alle Zwischenwerthe haben, welche auf die gemachten Abtheilungen fallen, das ist, A $a$, A $b$, A $c$, A $M$, A $n$, A $o$ u. s. f. seyn.

*Die Wahrscheinlichkeit für alle diese einzelnen Werthe sey gegeben.* Es sey möglich, dass sie in $a$ Fällen *Nichts* sey; in $b$ Fällen A a, oder 1, in $c$ Fällen, 2, oder A b sey, und so ferner.

Man mache das Polynomium

$a + b\,x + c\,x^2 + \ldots + h\,x^\mu + \ldots + t\,x^n$, *so drücken die Coëfficienten* a, b, c ... t *die Zahl der Fälle aus, in denen die Werthe so gross seyn können, als die Exponenten der Gröfse* $x$. *Die Summe aller möglichen Fälle ist die Summe aller Coëfficienten.* $(a + b + c + \ldots + t)$ und die Wahrscheinlichkeit, dass der wirkliche Werth der Rente $\mu$ seyn werde, ist $= \frac{h}{a+b+\ldots+t}$.

Dies ist nun alles aus dem obigen von selbst klar.

## 17.

*Zweyter Satz.* Es sey $\frac{0.a + 1.b + 2\,c + \ldots}{a+b+c+\ldots+t} = \mu = A\,M$, so ist A M *der mittlere oder der Durchschnitts-Werth der Rente.*

*Ferner.* Wenn dieser Werth $\mu$ für die Rente bezahlt wird, so ist der *gröfste mögliche Gewinn, den die Casse haben kann*, A M oder $\mu$, der alsdenn ihr zufällt, wenn der

der wirkliche Werth der Rente *Nichts* iſt, wenn nämlich der Rentenier gleich nach gekaufter Rente ſtirbt. *Der gröſste an ſich mögliche Verluſt* iſt AB—AM = n—$\mu$, den ſie leiden kann, und wirklich leidet, wenn der Rentenier das höchſte Lebensziel erreichet.

## 18.

*Dritter Satz. Dieſer an ſich mögliche Gewinn und Verluſt iſt von dem zu erwartenden Gewinn und Verluſt unterſchieden.*

Wenn der wirkliche Werth der Rente A h iſt, ſo iſt der Gewinn der Caſſe *h*M. Es ſey AM = $\mu$ eine *ganze* Zahl, ſo iſt *h* M = 1. Wenn jener Werth Ac wird, ſo iſt der Gewinn $\mu$—Ac, und wenn der wirkliche Werth *o* iſt, ſo iſt der Gewinn $\mu$.

Imgleichen wenn der wirkliche Werth der Rente über $\mu$ fällt, ſo hat die Caſſe Verluſt, und dieſer iſt 1, 2, ... n—$\mu$ je nachdem jener wirkliche Werth A*n*, A*o* ... AB wird.

Wenn der *mittlere Werth* $\mu$ *keine ganze Zahl iſt*, ſo fällt der Punct M auch nicht auf einen der obigen Theilungspuncte der Linie AB, und alsdenn iſt auch der Gewinn nicht = 1, wenn der wirkliche Werth auf A *h* fällt, ſondern nur h M. Eben ſo iſt der Verluſt nicht = 1, wenn der Werth auf A *n* fällt, ſondern nur n M. In dieſem Fall iſt der *Gewinn* h M, h M + 1, h M + 2, u. ſ. f. bis

bis AM, und der *Verluſt*, Mn, Mn+1, Mn+2... MB, je nachdem die wirklichen Werthe A*n*, A*o*, ... AB ſind.

Wird nun jeder *mögliche Gewinn* und *Verluſt in ſeine Wahrſcheinlichkeit* multiplicirt, ſo iſt die *Summe dieſer Producte, bey den Gewinnen, ſo groſs als die Summe der Momente der Coëfficienten des Polynomii, die vor dem Durchſchnittsgliede vorhergehen*, (jeden Coëfficienten nämlich in ſeine Entfernung von dem Durchſchnittsgliede multiplicirt). *Dieſe Momenten-Summe werde dividirt durch die Summe aller Coëfficienten; ſo hat man den zu erwartenden Gewinn* (den *mittlern Gewinn*, den *Gewinn im Durchſchnitt*). Die Summe der Momente der *nachfolgenden* Coëfficienten ebenfalls durch die Summe aller Coëfficienten dividirt, giebt den zu *erwartenden Verluſt* (den *mittlern Verluſt*). Beydes wird auch ausgedrückt durch die *Erwartung des Gewinns*, und die *Erwartung des Verluſtes*.

Dieſer Satz iſt daraus klar. Man ſetze das Polynomium ſey $a + bx + cx^2 + + lx^{\mu - hM} + h.\ x^{\mu} + ox^{\mu + Mn} + px^{\mu + Mn + 1} + + tx^n$, wo die Exponenten von x, nach und nach, Aa, Ab,.. Ah, AM, Ao... AB ſind, und $\mu =$ AM iſt. Fällt M nicht ſelbſt auf einen von den Theilungspuncten, oder iſt $\mu$ keine *ganze* Zahl, ſo iſt $hn = hM + Mn = 1$; und dann iſt in dem Polynomio der Coëfficient *h*, in $hx^{\mu} =$ Null.

In

In jedem Fall iſt h M. l die Gröſse des Gewinns h M, multiplicirt in l, als die Zahl der möglichen Fälle, in denen ſolcher ſtatt findet. Eben ſo auch b. a M ein ſolches Product, und a. A M ein ſolches, wo A M der gröſste mögliche Gewinn iſt. Dieſe Producte ſind Momente der vor *h* vorhergehenden Coëfficienten, jeden in ſeine Entfernung von dem Gliede $hx^{\mu}$ multiplicirt.

Weil nun die Zahl aller möglichen Fälle $= a + b + + q = S$, ſo wird die Summe jener Momente, jedes Moment dividirt durch die Summe aller möglichen Fälle, die Summe von Producten ſeyn, deren jedes die Gröſse eines jeden Gewinns enthält in ſeine Wahrſcheinlichkeit multiplicirt,

$$= h\,M.\frac{l}{S} + + \frac{a\,M.\,b}{S} + \frac{A\,M.\,a}{S}.$$

Die Summe dieſer Gewinne, jedweden in ſeine Wahrſcheinlichkeit multiplicirt, macht den zu *erwartenden ganzen Gewinn* aus. Bey dem wirklichen Erfolg kann zwar nur *Einer* von dieſen Gewinnen bey *Einer* Perſon erhalten werden; aber alsdenn wird ſelbiger auch *ganz* erhalten. Die Erwartung von Einem ganzen aus den verſchiedenen Gewinnen, oder mit andern Worten, der zu erwartende *Eine* unbeſtimmte Gewinn, beſteht aus den in der obigen Summe enthaltenen Theilen, und iſt dieſen zuſammengenommen gleich.

Die *Entfernungen von dem Durchſchnittsgliede* M*h*, M*b*, M*a*, MA, in Zahlen ausgedrückt, haben

zur *Einheit* eine von den gleichen Abtheilungen der Linie A B. Die Summe dieſer Theile iſt $n$, daher jene Einheit $\frac{AB}{n}$. Enthält AM ſolcher Theile $r$, und MB ihrer q, ſo iſt $n = r+q$. Daher kann die Einheit in der Summe der Gewinne auch durch $\frac{AM}{r}$ ausgedruckt werden, wenn AM der gröſste mögliche Gewinn iſt.

Es erhellet auf dieſelbe Art, daſs wenn die Momente der *nachfolgenden* Coëfficienten, zwiſchen $hx^{\mu}$ und $tx^{n}$, eben ſo genommen, und durch S dividirt werden, ſo komme der zu *erwartende Verluſt* heraus, worinn die Einheit durch $\frac{MB}{q}$ ausgedruckt werden kann, da denn MB der *gröſste mögliche Verluſt* iſt.

## 19.

*Zuſatz.* Wenn $a = b = c = t = 1$ oder alle Coëfficienten gleich und $= 1$ ſind, und $n = S$, welches der Fall iſt, wenn mit einem gewöhnlichen Würfel von ſechs Seiten mit den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet, geworfen werden ſollte, ſo iſt

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5}{6} = \frac{(S+1)S}{2.6} = 2\frac{1}{2}\ldots$$

das iſt, der *mittlere Werth eines Wurfs.* Nun iſt der *zu erwartende Gewinn*, der in drey Fällen entſtehet, wenn 0, 1, 2, geworfen wird,

$$= \frac{\frac{1}{2}}{6} + \frac{1.(1+\frac{1}{2})}{6} + 1.\frac{2\frac{1}{2}}{6} = \frac{4\frac{1}{2}}{6} = \frac{3}{4}.$$

Und

Und der *zu erwartende Verluſt*, der bey den Würfen, 3, 4, 5 ſtatt findet, ebenfalls

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{6} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(2 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{6} = \frac{3}{4}.$$

*Es iſt überhaupt* (nach Lehnſatz 1.) *der zu erwartende Gewinn dem zu erwartenden Verluſt gleich, wenn der mittlere Werth bezahlet worden iſt.*

## 20.

*Die Gröſse des zu erwartenden Verluſtes iſt hier die Gröſse des Riſico der Caſſe.* So viel nämlich wagt die Caſſe zu verlieren, wogegen ſie eben ſo viel wieder gewinnen kann. Beydes gegen einander aufgerechnet giebt Nichts. Allein davon, was ſie aufs Spiel ſetzet, was ſie mit gleicher Wahrſcheinlichkeit gewinnen oder verlieren kann, iſt die Rede, wenn man ſaget, daſs ſie ſo oder ſo viel riſquire.

## 21.

*Dritter Satz. Wenn* $AB = AM + MB = n$ *dieſelbe Gröſse behält, und auch die Summe aller möglichen Fälle,* $a+b++t=S$ *dieſelbige bleibet, ſo wird das Riſico der Caſſe in dem Falle am gröſsten ſeyn, wenn* $a = \frac{S}{2} = t$, *und alle übrige Coëfficienten* $= o$ *ſind, und* $MB = \frac{AB}{2} = \frac{n}{2}$ *genommen wird,* (nach Lehnſatz 3. §. 6.)

In dieſem Fall bekommt das Polynomium die Form des Binomii $a+ax^n$, und es wird $\mu = \frac{n.a}{2a} = \frac{n}{2}$. Das *gröſste Rifico*, ſo groſs als das Moment der Coëfficienten dividirt durch die Summe aller Coëfficienten, iſt $= \frac{n}{2} \cdot \frac{a}{2a} = \frac{n}{4} = \frac{AB}{4}$, und in dieſem Fall $= \frac{AM}{2} = \frac{MB}{2}$.

Das iſt; „Man berechnet den zu erwartenden Ver„luſt, oder das *Rifico* nach der Vorausſetzung, daſs es „nur *zwey* Fälle gebe, *Einen für den gröſsten Gewinn*, „und *Einen für den gröſsten Verluſt*. Dieſe beyden „Fälle werden aber auch als *gleich wahrſcheinlich* ange„ſehen.“

Bey einem Wurf mit einem gemeinen Würfel von ſechs Seiten, die durch 0, 1, 3, 4, 5, bezeichnet ſind, iſt der *mittlere Werth des einzelnen Wurfs* $2\frac{1}{2}$, und der zu *erwartende Verluſt* oder das *Rifico* $\frac{3}{4}$. §. 19. Das *gröſste Rifico* aber wird gefunden, wenn man annimmt, der Würfel habe nur zwo Seiten, eine mit 0, die andere mit der Zahl 5 bezeichnet, oder wenn ſechs Seiten bleiben ſollen, daſs drey davon 0, und drey 5 haben. Wenn jenes iſt, ſo ſind zwey mögliche Fälle, und in $(a+ax^n)$ iſt $a = 1$, $n = 5$. Der Durchſchnittswerth eines Wurfs iſt wiederum $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, der *äuſserſte mögliche Verluſt* $= 2\frac{1}{2}$, gleich dem *äuſserſten möglichen Gewinn*. Das *gröſste Rifico* alſo $= \frac{1}{4}$.

Sind

Sind ſechs Seiten am Würfel, ſo iſt $n = 5$, $a = 3$. Aber wiederum das *gröſste Rifico* $= \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2.3} = \frac{5}{4}$.

Sind die Seiten der Würfel mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, bezeichnet, ſo iſt der *mittlere Werth* eines Wurfs $= 6.\frac{6+1}{2.6} = 3\frac{1}{2}$. In dem Polynomio $x+x^2+++x^6$ gehört der Durchſchnitts-Coëfficient zu dem Gliede, worinn $x^{\frac{7}{2}}$ vorkommen ſollte, und iſt $= 0$. Die Entfernungen der wirklich vorhandenen Coëfficienten von jenen ſind $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$. Die Zahl aller Fälle 6. Daher die Momente der Coëfficienten auf einer Seite des Durchſchnitts-Coëfficienten, dividirt durch die Summe aller, $= \frac{1.\frac{1}{2} + 1.\frac{3}{2} + 1.\frac{5}{2}}{6} = \frac{3}{4}$. Dieſs iſt das *eigentliche Rifico*, ſo groſs wie in dem vorigen Fall.

Das *gröſste* aber iſt $\frac{6-1}{4} = \frac{5}{4}$, auch wie in dem vorhergehenden Fall.

## 22.

*Zuſatz.* Die Gröſse $AB = n$, wird erkannt aus der Summe der *äuſserſten Werthe des Verluſtes und des Gewinns*, $AM + MB$. Dieſe Summe $AB$ iſt auch die *Differenz zwiſchen dem, was in den beyden äuſserſten Fällen erfolgt.* Sind nun dieſe äuſserſten Gröſsen einander gleich, ſo können ſie bey der Berechnung des gröſsten Rifico auch für *gleich wahrſcheinlich* angenommen werden.

Sind sie aber nicht gleich, so kann bey der Voraussetzung, dass ihre Wahrscheinlichkeit gleich gross sey, das *grösste Risico*, $= \frac{AB}{4}$, *grösser ausfallen als* MB, oder grösser als AM; das ist, es kann grösser werden *als der an sich mögliche Verlust ist.* Dies ist wieder die Natur der Sache. Auch kann auf Seiten des Käufers der Rente oder des Einsetzers, sein Risico zu verlieren nicht grösser seyn, als sein grösster möglicher Verlust, das ist, als der grösste mögliche Gewinn der Casse ist. Da nun das Risico, wenn die wahre mittlere Grösse bezahlet ist, auf beyden Seiten gleich ist, so muss es kleiner seyn als das äusserste des Gewinns sowohl als des Verlustes. Daraus folgt, dass die Berechnung des grössten Risico in diesem Fall, auf einer Seite wenigstens, allzuweit von der Wahrheit abweichen würde. Und hieraus ergiebt sich folgender Satz.

## 23.

*Vierter Satz. Wenn* AM *und* MB *merklich verschieden sind,* AM *für den mittlern Werth der Rente genommen, so müssen die Wahrscheinlichkeiten jener äussersten Fälle in umgekehrten Verhältniss mit ihren Grössen genommen, und das grösste Risico aus der Momenten-Summe in dem Binomio* $a+bx^n$, *oder, wenn* $AB = n$ *für die Einheit gerechnet wird, aus den Momenten in* $a+bx$, *worinn* $a+b=2$ *zu setzen ist, berechnet werden.*

Und

Und dann ergiebt ſich das Verfahren von ſelbſt. Gegeben ſind MB und AM. 1) Man nehme $a : b = 1+x : 1-x$ in dem Verhältniſs MB : AM.

2) Man nehme für das Binomium $a+bx$ den *Exponenten des Durchſchnitts-Coëfficienten* $\mu = \frac{b}{a+b} = \frac{1-x}{2}$, und ſuche die Entfernung beyder Coëfficienten *a* und *b*, von dieſem. Die Entfernung des *a* iſt $= \frac{1-x}{2}$, und des *b*, $= 1 - \frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2}$.

3) Daraus wird die *Summe der Momente der Coëfficienten auf einer Seite* $= b\left(\frac{1+x}{2}\right)$; *und auf der andern Seite* $= a\left(\frac{1-x}{2}\right)$. Alſo auf beyden Seiten $= \frac{\overline{1+x} \cdot \overline{1-x}}{2} \cdot AB = \frac{1-x^2}{2} \cdot AB$.

4) *Die Summe der Momente dividirt durch 2* giebt das *gröſste Rifico* $= \frac{1-x^2}{4} \cdot AB$.

## 24.

*Zuſatz.* Es mag AM oder MB, das iſt, der *an ſich mögliche gröſste Gewinn oder Verluſt der Caſſe*, der gröſste von beyden ſeyn, *ſo findet man das gröſste Rifico nach der letzten Formel*, wenn für x der *Quotient* geſetzet wird, *der durch die Diviſion der Differenz zwiſchen dem gröſsten an ſich möglichen Gewinn und*



Digitized by Google

*Verlust*, (*positiv* sie genommen) *mit der Summe von beyden herauskömmt.* Es sey AM+MB=S, ihre positive Differenz D, so ist (nach Satz 4. §. 23.) zu nehmen, $S:\frac{1}{2}D=a+b:x=2:x$. Daher $x=\frac{D}{S}$, und

$$\frac{1-x^2}{4}\cdot S.=\frac{S}{4}\left(1-\frac{D^2}{S^2}\right)=\frac{(S+D).(S-D)}{4\,S.},=$$

dem *gröfsten Risico.*

## 25.

*Ex.* 1. Eine Person, 30 Jahr alt, kaufe eine *Leibrente* für ihren baaren Werth, wie hoch geht das *Risico* der Casse? Der Werth der Rente ist nach *Süfsmilchs* Tafel, und nach dem 4 Procent Zinsenfufs, 15, 0847. Dieſs ist zugleich der *gröfste mögliche Gewinn der Casse*, wenn der Rentenier gleich nach dem Ankauf der Rente stirbt. Dagegen kann selbiger auch das höchste Lebensziel, 96 Jahre, erreichen, und in diesem äufsersten Fall verliert die Casse die Zeitrente auf 66 Jahr, als die Altersergänzung, weniger dem Einsatz, das ist 23, 1218 — 15, 0847 = 8, 0371. Die Summe des äufsersten Gewinns und Verlustes ist also 23, 1218, ihre Differenz aber 15, 0847 — 8, 0371 = 7, 0476. Die Summe und die Differenz zusammen S + D = 30, 1694; S — D = 16, 0742. Das gröfste Risico also

$$=\frac{30,1694\cdot 16,0742}{4\quad 23,1218}=5,2\ldots\ldots$$

*Ex.* 2. Ein Ehemann von 30 Jahren kaufe eine *Wittwenrente* 1 für seine Frau von 20 Jahren, und zahle

zahle dafür den baaren Werth nach *Süſsmilchs* Tabelle und 4 Procent-Fuſs, d. i. 4, 1194. Dieſs iſt der gröſste mögliche Gewinn der Caſſe, der erfolgt, wenn die Frau vor dem Manne ſtirbt. Da nun auch hingegen der Mann gleich nach dem Ankaufe der Rente ſterben, und dann die Frau das höchſte Lebensziel als Wittwe erreichen kann, ſo iſt der gröſste mögliche Verluſt ſo groſs als eine Zeitrente auf 76 Jahr, weniger 4, 1194; = 23, 7312 — 4, 1194 = 19, 6118. Die Summe von beyden S iſt 23, 7312. Die Differenz D = 15, 4924. Alſo S + D zuſammen = 39, 2236; und S — D = 23, 7312 — 15, 4924 = 8, 2388. Daher $\frac{39,2236 \cdot 8,2388}{4 \cdot 23,7312} = 3,4$, dem *gröſsten Rifico* der Caſſe.

## 26.

*Zuſatz* 1. Die *allgemeinen Auflöſungen für ſolche Aufgaben* ſind folgende:

1) Bey der *gekauften Leibrente* iſt *der mögliche gröſste Gewinn* der Caſſe ſelbſt dieſer Werth baar $= \lambda \overline{a}$.

Der *gröſste mögliche Verluſt* iſt $= \int \frac{1}{r^x} - \lambda \overline{a}$ wenn $x$ die *Altersergänzung* des Renteniers iſt.

*Beyde zuſammen* $S = \int \frac{1}{r^x}$.

Ihre *Differenz* $D = \pm \int \frac{1}{r^x} \mp 2 \lambda \overline{a}$

$S + D = 2 \int \frac{1}{r^x} - 2 \lambda \overline{a}$, oder auch $+ 2 \lambda \overline{a}$;



Digitized by Google

$S - D = 2\,\lambda\overline{a}$, oder $2\int\frac{I}{r^x} - 2\,\lambda\overline{a}$. In jedem Fall alſo $\frac{(S+D).\,(S-D)}{4.\,S} = \frac{4\left(\int\frac{I}{r^x}\cdot\lambda\overline{a} - (\lambda\overline{a})^2\right)}{4\int\frac{I}{r^x}}$

$= \lambda\overline{a} - \frac{(\lambda\overline{a})^2}{\int\frac{I}{r^x}}$.

Dieſer Ausdruck enthält eine kurze Methode, das Riſico zu berechnen.

2) Wenn eine *Wittwenrente* gekauft iſt, ſo ſey der *Einſatz* oder baare Werth derſelben E; die Zeitrente auf die Altersergänzung des Renteniers, das iſt hier, der Frau, wiederum $\int\frac{I}{r^x}$, ſo iſt auch eben ſo der *gröſste Gewinn* der Caſſe $= E$, der *gröſste Verluſt* $= \int\frac{I}{r^x} - E$. Alſo $S = \int\frac{I}{r^x}$ und $D = \int\frac{I}{r^x} - 2\,E$. Daher $S+D = 2\left(\int\frac{I}{r^x} - E\right)$, und $S - D = 2E$.

Dieſe beyden Werthe wechſeln um, wenn $\int\frac{I}{r^x} - 2E$ negativ iſt.

Folglich $\frac{(S+D).\,(S-D)}{4.\,S} = \frac{4\left(E.\int\frac{I}{r^x} - E.\,E\right)}{4.\int\frac{I}{r^x}}$

$= E - \frac{E^2}{\int\frac{I}{r^x}}$.



Digitized by Google

## 27.

*Zuſatz* 2. Iſt es eine *Eherente*, oder Verbindungsrente, welche gekauft iſt, ſo ſey ihr baarer Werth $\lambda a\overline{b}$, und $\int\frac{1}{r^u}$ ſey eine Zeitrente auf die Altersergänzung der *älteſten verbundenen Perſon.* Das *gröſste Rifico* iſt alsdenn $= \lambda a\overline{b} - \frac{(\lambda a\overline{b})^2}{\int\frac{1}{r^u}}$.

Iſt der Mann 30 Jahr alt, die Frau 20, ſo iſt $\lambda a\overline{b} = 12,6711$, und das gröſste Rifico
$= 12,6711 - \frac{(12,6711)^2}{23,1218} = 12,6711 - 6,95 = 5,7.$

## 28.

*Ex.* 3. Erwirbt ſich derſelbe Ehemann dieſelbe *Wittwenrente* durch *jährliche aber vorauszuzahlende Beyträge*, ſo iſt der *gröſste mögliche Verluſt* der Caſſe, die Zeitrente auf die Altersergänzung der Frau von 20 Jahren, das iſt auf 76 Jahre (23,7312), weniger dem erſten empfangenen Beytrag 0,3013. Der *gröſste mögliche Gewinn* kommt ſo heraus. Die Ehe kann ſo lange dauern, als die Altersergänzung des Mannes, der hier die älteſte der verbundenen Perſonen iſt, das iſt 66 Jahr, und alsdenn noch die Frau vor dem Mann abſterben. In dieſem Fall empfängt die Caſſe jährlich 0,3013 auf 66 Jahr, wogegen ſie nichts ausgiebt, $= 1,04(0,3013.23,1218) = 7,2453$. Dieſs iſt der *gröſste mögliche Gewinn.*

Digitized by Google

*Gewinn.* Beyde zusammen machen $S = 30,6752$. Ihre Differenz D ist $= 16,1846$. Also $S + D = 46,8598$ und $S - D = 14,4906$.

Daher $\frac{46,8598 \cdot 14,4906}{4 \cdot 30,6752} = 5,53$.

Die *allgemeine Auflösung* solcher Aufgaben ist folgende. Die *Ergänzung des Alters* bey dem Manne sey $m$, und bey der Frau $n$, der jährliche Beytrag $C$, der *grösste mögliche Verlust der Casse* $\int \frac{1}{r^n}$, wenn nicht praenumerirt wird; der *grösste mögliche Gewinn* ist $C \cdot \int \frac{1}{r^m}$.

Daher $S = \int \frac{1}{r^n} + C \cdot \int \frac{1}{r^m}$; $D = \int \frac{1}{r^n} - C \cdot \int \frac{1}{r^m}$.

Und $\frac{(S+D)}{4} \cdot \frac{(S-D)}{S} = \frac{2 \cdot \int \frac{1}{r^n} \cdot 2 \cdot C \cdot \int \frac{1}{r^m}}{4 \cdot \left( \int \frac{1}{r^n} \cdot + C \cdot \int \frac{1}{r^m} \right)}$

$= \frac{C \cdot \int \frac{1}{r^n} \cdot \int \frac{1}{r^m}}{\int \frac{1}{r^n} \cdot + C \cdot \int \frac{1}{r^m}}$.

Wird *der erste Beytrag praenumerirt*, so ist der *grösste Verlust* der Casse $\int \frac{1}{r^n} - C$; der *grösste Gewinn* $C \cdot \int \frac{1}{r^m} + C$. Also $S = \int \frac{1}{r^n} + C \cdot \int \frac{1}{r^m}$, und

$D = \int \frac{1}{r^n} - C \cdot \int \frac{1}{r^m} - 2C$

Daher

Digitized by Google

Daher $\frac{(S+D).(S-D)}{4.S} = \frac{\left(\int\frac{1}{r^n} - C.\right).\left(C.\int\frac{1}{r^m} + C.\right)}{\int\frac{1}{1^n} + C.\int\frac{1}{r^m}}$

das *gröſste Rifico.*

## 29.

Hierbey kann es Aufmerkſamkeit erregen, daſs ein Unterſchied in dem gröſsten Rifico bey dem *Contributionsfuſs* und dem *Capitalfuſs* Statt findet. Dieſer würde nun wohl noch kleiner ausfallen, wenn man das eigentliche, oder wahre Rifico berechnen könnte. Denn die Vorausſetzung, nach der man alle Zwiſchenwerthe, welche die verſicherte Rente haben kann, auf die äuſserſten bringt, kann in einem Fall mehr von dem genauen Werth abweichen, als in dem andern. Gleichwohl iſt aus der Natur der Sache klar, daſs bey den *Beyträgen* etwas mehr gewaget werde. Wer Beyträge nimmt, wagt erſtlich ſo viel, als ein anderer, der ſich die baaren Werthe zahlen läſst, das iſt, in dem Fall, wo der Mann 30, die Frau 20 Jahr alt iſt, aufs höchſte 3, 4 für die Rente 1. (nach §. 25.) Aber er wagt noch einmal etwas, indem er ſtatt des baaren Werths der Wittwenrente eine jährliche Rente von der Gröſse des Beytrags empfängt, die auf die Ehezeit dauert, das iſt, er waget noch ſo viel mehr, als bey einer Eherente gewaget wird. Dieſs würde in dem gegenwärtigen Fall ſeyn 5, 7. 0, 3013 = 1, 72. (§. 27.) Alſo beydes zuſammen

5, 12,

5, 12, das ist, nahe so viel als vorher. Es kann nicht ganz so gerechnet werden, weil diese beyden Fälle nicht von einander unabhängig und getrennt sind. Es wird ein wenig mehr gewagt, wenn das beydes bey *demselben Paar* vorkommt. Denn der gröste Verlust bey der Wittwenrente fällt zusammen mit dem gröstem Verlust bey der Eherente, wenn nämlich der Mann gleich nach dem Ankauf der Rente stirbt. Die Voraussetzung, nach der man das Maximum in dem Risico findet, hat doch in den oben berechneten Exempeln das Risico sehr nahe in gleichem Verhältniss vergrössert. Man kann sie also mit Sicherheit gebrauchen.

Diess *grössere Risico bey den Beyträgen hat auch eine grössere Erwartung zu gewinnen*, die allemal jenem gleich ist, zur Folge. Dennoch entsteht daraus ein gröserer Werth der Summe, die von Seiten des Entrepreneurs aufs Spiel gesetzet wird. Aber wenn man dagegen bedenket, dass bey *ausgesuchten Gesellschaften* der Vortheil, der aus der *mindern Sterblichkeit entspringet*, und auf die Seite der Casse fällt, gröser ist bey Beyträgen, als bey Einsätzen, *(§. 69. der Abhandl. von der Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften)*, so ergiebt sich, dass die Casse, ob sie gleich etwas mehr waget, bey den Beyträgen, dennoch auch mehrere Vortheile voraus habe und also nicht schlimmer sondern besser daran sey, als bey den Einsätzen, wenn man nämlich sonst als Regel voraussetzet, die Casse solle eben so wenig

etwas

etwas vor den Intereſſenten, als dieſe vor jener voraus haben. Denn es iſt ein anderes, wenn der Entrepreneur oder die Caſſe ſo etwas nach Billigkeit verlangen kann. Dieſe Vortheile wachſen denn vielleicht nicht bey beyden Verſichrungsarten in dem gleichen Verhältniſs mit dem gröſsten Riſico. Das Reſultat daraus iſt, daſs ein Entrepreneur, der nicht die Abſicht hat, zu ſpielen, der die etwanigen Vortheile aus der geringern Sterblichkeit wieder weggeben, nur auch nichts verlieren will, ſondern bloſs einen guten Zweck befördern, daſs der etwas mehr Bedenken haben könne, die Garantie zu übernehmen bey dem Beytragsfuſs, als wenn baare Einſätze gezahlt werden. Eine andere Frage iſt es, ob die Geſellſchaft, wenn ſie ſelbſt die Garantie leiſtet, nicht Gründe finde, den Beytragsfuſs vorzuziehen? Das wird ſich unten in einer der folgenden Abhandlungen zeigen.

## 30.

Das *gröſste Riſico der Caſſe bey einer einzelnen Rente iſt zugleich das Riſico des Intereſſenten.* Wer eine Rente kauft, erhält eine Verſicherung auf ſie, die den Werth hat, den er dafür erlegt, oder doch nicht wohlfeiler gelaſſen werden kann. In ſo weit bekommt er ſogleich für ſein Geld den Werth deſſelben. Allein in ſo ferne als es ungewiſs iſt, ob nicht bey dem Erfolg dieſe Ausgabe umſonſt für ihn oder die Perſon, die er verſorgen will,

Digitized by Google

will, ſeyn werde, in ſo ferne wird etwas von ihm gewaget, oder aufs Spiel geſetzet. Das iſt aber denn ein Spiel, was ſo lange dauret, als ſeine Theilnehmung an dem Inſtitut, und iſt ein gutes wohlthätiges Spiel, wobey nur verloren wird, wenn es zu dem Zweck, den man hat, keines Gewinns bedarf, und dann nur zum Beſten anderer verloren wird. Gleichwohl iſt es doch vernünftig, daſs jeder, der ſich darauf einläſst, Rechnung mache, ob er unter ſeinen Umſtänden, ſo viel wagen könne und dürfe, als ſein Riſico beträgt? Das gröſste Riſico iſt das, was er aufs äuſserſte wagt. Davon kann er denn immer noch etwas abziehen.

## 31.

Die Art, das gröſste Riſico durch die Anwendung der obigen allgemeinen Lehnſätze zu berechnen, iſt bey einzelnen Renten ausführlich gezeiget, um in dem folgenden deſto kürzer ſeyn zu können. Die Richtigkeit der nachfolgenden Sätze wird nun für ſich ſelbſt einleuchten.

*Fünfter Satz. Mehrere Perſonen m kaufen, jede eine gleiche Rente; das Alter der Perſonen, von deren Leben oder Tode die Rente abhängt, ſoll gleich ſeyn*, (nicht bloſs der Werth der Renten für ſich). Es ſey der *gröſste mögliche Gewinn der Caſſe auf eine einzelne ſolche Rente*, AM, *und der an ſich mögliche Verluſt* MB. (Fig. 2.).

Die

Die Linie A B enthalte wiederum *n* gleiche Theile, und die wirklichen Werthe der einzelnen Rente beym Erfolg können fallen auf A, auf *a*, *b*, *c*, u. ſ. f. Der *mittlere Werth* iſt A M.

Die *n* Theile können von A gezählet werden, oder auch von M an. Fällt der wirkliche Werth auf A, ſo iſt er von A an gerechnet = o, und die folgenden Werthe ſind 1, 2 ... n. Setzet man bey M den Werth o, ſo wird ſolcher *negativ* in A, und zwiſchen A und M; aber *poſitiv* zwiſchen M und B.

Der *an ſich mögliche Gewinn der Caſſe bey der Zahl der Rente m iſt* = m. A M.

Der *an ſich mögliche Verluſt* = m. M B.

Die *Zahl der möglichen Fälle*, in denen nach der Mortalitätstafel die einzelne Rente die verſchiedenen Werthe haben kann, ſoll durch die Coëfficienten des Polynomii $(a+bx++tx^n) = \Pi$ gegeben ſeyn; worinn *a* die Zahl der Fälle iſt, in denen die Rente auf A ſelbſt fällt, *b* die Zahl derer, in denen ſie auf *a*, das iſt um $Aa = \frac{1}{n}$. A B gegen B fällt, und ſo ferner; ſo daſs die Exponenten der Potenz der veränderlichen Gröſse *x* die wirklichen Werthe angeben, die in ſo vielen Fällen, als die Coëfficienten ausdrucken, möglich ſind.

Die Zahl aller möglichen Fälle iſt die Summe aller Coëfficienten a+b++t.

Es ſey ferner $(a+bx++tx^n)^m = \Pi^m = A + Bx + Cx^2 ++ Mx^{m\mu} ++ Tx^{mn}$, und $\mu = \frac{b+2c+3d+ +nt}{a+b+c+ +t}$ wobey der Coëfficient M in $Mx^{m\mu}$ auch Null ſeyn kann. Dann ſuche man die *Summe der Momente der Coëfficienten, welche in* $\Pi^m$ auf das Glied $Mx^{m\mu}$ folgen. Jeder Coëfficient wird nämlich multiplicirt in ſeinen Abſtand von dem *Durchſchnitts-Coëfficienten* M, und dieſer Abſtand wird aus dem Exponenten der Potenz von x berechnet, z. B. der Abſtand des Coëfficienten T von M iſt $mn - \mu m = m(n-\mu)$.

Dieſe *Momenten-Summe dividirt durch die Summe aller möglichen Fälle* in $\Pi^m$, welche $(a+b++t)^m$ iſt, *giebt das eigentliche Rifico der Caſſe.*

Dieſer Satz iſt aus dem obigen von ſelbſt klar. Man ziehe nun eine Linie A′ B′ (Fig. 3.) = m. AB, in *mn* gleiche Theile getheilt, ſo enthält A′ M ſolcher Theile $\mu$ m, dergleichen *n* in A B (Fig. 2.) ſind, und alsdenn iſt die Einheit $\frac{AB}{n}$. Die wirklichen Werthe der *m* Renten zuſammen genommen, können fallen in A′ und B′, dieſs ſind die äuſserſten Werthe, und dazwiſchen auf alle Theilungspuncte der Linie A′ B′. *Die Coëfficienten im Polynomio* $\Pi^m$ *drücken die Zahl der möglichen Fälle für jeden dieſer Werthe aus;* M in $Mx^{m\mu}$ die Zahl der Fälle, in denen der Werth auf A′ M fällt. Gehört aber M nicht mit zu den Theilungspuncten, wie in dem Fall, wenn $m\mu$ keine *ganze* Zahl iſt, ſo iſt M = 0.

32. *Sech-*

## 32.

*Sechſter Satz. Iſt in den einzelnen Renten der gröſste mögliche Gewinn dem gröſsten möglichen Verluſt gleich*, oder AM = MB (Fig. 2.) *ſo ſey* M *der gröſste Terminus in dem Binomio* $(1+1)^m$, oder *der gröſste Coëfficient in dem Binomio* $(1+x^n)^m$; *und m eine gerade Zahl, ſo wird das gröſste Riſico der Caſſe bey m Renten ſeyn*, $= \frac{m\,M}{4 \cdot 2^m} \cdot$ A B.

*Beweis.* Denn wenn man ſtatt des Polynomii $(a+bx++tx^n)^m$ das Binomium $\alpha^m (1+x^n)^m$ nimmt, worinn $a\,\alpha = a+b++t$ iſt, ſo iſt die Summe der Momente der Coëfficienten auf einer Seite des Durchſchnitts-Coëfficienten in $\alpha^m (1+x^n)^m$ gröſser als in dem erſten Polynomio, (nach Lemma 3. §. 7.) und dieſe Momenten-Summe in $\alpha^m (1+x^n)^m$, oder Q iſt alsdenn $= \alpha^m \cdot \frac{m\,M}{4} \cdot$ n. (*Lehnſatz* 4. §. 8.). Die Entfernungen der Coëfficienten haben hier zur Einheit *n*. Daraus folgt, daſs auch $\frac{Q}{(2\alpha)^m} = \frac{Q}{(a+b++t)^m}$ in dieſem Fall am gröſsten iſt, alſo das gröſste Riſico $= \frac{m\,M}{4 \cdot 2^m} \cdot n = \frac{m\,M}{4 \cdot 2^m} \cdot$ A B.

*Zuſatz* 1. In dem Binomio $\alpha^m (1+x^n)^m$ kann y ſtatt $x^n$ geſetzet werden. Alsdenn iſt $Q = \frac{m\,M}{4} \cdot \alpha^m$, und es iſt $n = 1$ genommen.



Digitized by Google

Es fallen nämlich bey der Vorausſetzung die Werthe der *m* Renten zuſammen in der Linie A′ B′ *nur an ſolchen Stellen, die um* $n = AB$ *von einander entfernet ſind.* Für die Zwiſchenwerthe fallen die Coëfficienten aus. Bey der Subſtitution des *Binomii* $\alpha\,(1+x^n)$ ſtatt des *Polynomii* $a+bx++tx^n$ bey den einzelnen Renten, hatte man alle Werthe, auſser den äuſserſten, wegfallen laſſen.

Da hier $AB = 2\,AM = 2\,MB$, ſo iſt das *gröſste Rifico* auch $= \frac{mM}{2^m} \cdot \frac{MB}{2}$.

## 33.

*Zuſatz* 2. Wenn die Zahl der Renten *ungerade* iſt, $m-1$, ſo iſt die Momenten-Summe der Coëfficienten auf beyden Seiten des Durchſchnitts-Coëfficienten (der alsdenn $= o$ iſt, und zwiſchen den beyden mittlern gröſsten Coëfficienten des Binomii $(1+x)^{m-1}$ fällt,) $= \frac{m.\,M'}{4}$, wenn M′ einer der beyden mittlern gröſsten Coëfficienten iſt (*Lehnſ.* 4. §. 9.). Folglich iſt das gröſste Riſico in dieſem Fall $= \frac{m.\,M'}{4} \cdot \frac{1}{2^{m-1}}\,AB$, und weil $M' = \frac{1}{2}\,M$. (§. 9.) auch $= \frac{m}{4} \cdot \frac{M}{2^m}$. *Alſo iſt das gröſste Rifico gleich bey einer geraden Zahl m, und der nächſtniedern ungeraden,* $m-1$.

34. Der

## 34.

Der mittlere gröſste Coëfficient M des Binomii von der geraden Potenz $m$, iſt bekanntlich $S^{\mu}\overline{\mu+1}$, wenn $\mu = \frac{1}{2}$ m genommen wird. Allein wenn $m$ eine etwas groſse Zahl iſt, ſo wird die genaue Berechnung von M zu weitläuftig, und da muſs man ſich begnügen mit einem allgemeinen *nähernden Verhältniſs des gröſsten Coëfficienten zu der Summe aller Coëfficienten*, kann das auch, da es ſo nahe zutrifft, und, was es hier noch mehr brauchbar macht, immer ein wenig gröſser iſt, als das wahre. Nach *Moivre's* Angabe, (in ſeinen *Miſcell. Analyt.* S. 128.) der ſich hierbey vorzüglich bemühet hat, iſt nahe $\frac{M}{2^m} = 2,168.\frac{(m-1)^{m-\frac{1}{2}}}{m^m}$, wenn $m$ eine groſse Zahl iſt, oder $= 2,168.\frac{(m-1)^m}{m^m}.\frac{1}{(m-1)^{\frac{1}{2}}}$.

Nun iſt aber

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^m = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5} + \text{—}$$

nahe, wenn $m$ eine groſse Zahl iſt, und genau ſo, wenn m *unendlich* groſs iſt, das heiſset, es iſt $\left(\frac{m-1}{m}\right)^m$ der Zahl gleich, deren *natürlicher Logarithmus* — 1 iſt, oder $= \frac{1}{2,71828}$. Folglich wird

$$\frac{M}{2^m} = \frac{2,168}{2,71828}.\frac{1}{(m-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{0,797}{(m-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nimmt man dafür $\frac{0,8}{m^{\frac{1}{2}}}$, so erhält man eine *Zahl*, die *noch mehr sich dem wahren Verhältniss nähert*, als der obige *Moivrische* Ausdruck, und doch auch das wahre Verhältniss noch immer ein wenig zu gross angiebt. Sogar wo $m$ unter 10 ist, kann man sich ohne sonderlichen Fehler der letzten Formel bedienen.

Daraus erhält man *den allgemeinen Ausdruck für das grösste Risico* bey $m$ Renten $= \frac{0,8.m}{4.m^{\frac{1}{2}}} \cdot AB = 0,2.m^{\frac{1}{2}}.AB$.

## 35.

*Siebenter Satz. Sind bey den einzelnen Renten der grösste Gewinn* AM, *und der grösste Verlust* MB, *unterschieden, so setze man ihre Differenz dividirt durch die Summe* $= x$, *und multiplicire* $0,2.m^{\frac{1}{2}}.AB$ *mit* $\sqrt{(1-x^2)}$, *so bekommt man das grösste Risico.* Dieser letzte Factor ist ein Bruch, und wird leicht durch Logarithmen gefunden.

Dieß folget aus Lehns. 5. §. 10. und aus Satz 4. in §. 23. von selbst.

*Anmerkung.* Wenn $m$ eine grosse Zahl ist, so kann die letzte Multiplication mit $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ weggelassen, und schlechthin für das grösste Risico, $0,2.m^{\frac{1}{2}}.AB$. (wie §. 34.) gebrauchet werden. Diese letztere ist grösser, allein es entstehet daraus nicht die Folge, wie oben (§. 22.) bey

bey den einzelnen Renten, daſs nämlich das ſo gefundene gröſste Riſico = o, 2. $m^{\frac{1}{2}}$ A B, das gröſste mögliche m. A M, oder m. M B übertreffen werde; es müſsten denn A M, und M B gar ſehr von einander verſchieden ſeyn.

## 36.

Bey der Berechnung dieſes Riſico der Caſſe kann man, wenn die Perſonen von verſchiedenem Alter ſind, wie in den gemiſchten Geſellſchaften, das mittlere oder *Durchſchnittsalter* der Intereſſenten zum Grunde legen. Es ſey alſo bey einer Wittwencaſſe *m*, oder die *Zahl der Intereſſenten*, 576, *das Alter der Ehemänner* im Durchſchnitt, 45 Jahr, *der Frauen* 35 Jahr, ſo wird der Werth des gröſsten Riſico, auf die Penſion 1 bey jedem Paar, ſo gefunden.

1) Wenn *baare Einſätze gezahlet ſind*, alles nach *Süſsmilchs* Tafel und nach 4 Procent berechnet.

Der baare *Einſatz* iſt = 4,'4084. Dieſs iſt der *gröſste mögliche Gewinn* bey einer einzelnen Rente A M. (Fig. 2.).

Die Zeitrente auf 61 Jahr, als die Altersergänzung der Frau, iſt 22,7149 und 22,7149 — 4,4084 = 18,3065 *der gröſste mögliche Verluſt bey Einem Paar*, M B. Alſo A B = 22,7149. Ferner $m^{\frac{1}{2}}$ = 24.

Daraus wird o, 2. $m^{\frac{1}{2}}$ . A B
= o, 2. 24. 22,7149 = 109,03152.

Wenn die Pension im Durchschnitt bey jedem Paar 100 ist, so macht dies 10903 aus. Dies ist die meisten male schon genau genug. Allein es ist doch das *grösste Risico* noch geringer.

Weil $\frac{18,3065 - 4,4084}{22,7149} = x = 0,612$

so wird $1 + x = 1,612$, und $1 - x = 0,387$.

und $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{0,625} = 0,79$.

Folglich das gröste Risico

$= 109,0315 . 0,79 = 86,135$, das ist auf 100 Rthlr. Pension für jedes Paar $= 86\frac{1}{2}$ Rthlr.

2) *Wenn jährliche, vorauszuzahlende Beyträge gegeben werden*, so ist für die Pension 1 der erste wirklich gezahlte Beytrag $= 0,4116$, bey dem Alter des Mannes 45, und der Frau 35.

Der *grösste mögliche Verlust* auf Ein Paar also, $22,7149 - 0,4116 = 22,3033$. Der *grösste mögliche Gewinn* dagegen, wenn die Ehe noch 51 Jahr dauert, so lange als die Altersergänzung des Mannes, und dann die Frau vor dem Manne abstirbt,

$= 0,4116 . \int_{1^{51}}^{1} = 0,4116 . 21,61748$

$= 8,89775$, und $22,3033 + 8,8977 = 31,2010 = AB$.

Folglich *das grösste Risico* $= 0,2 . m^{\frac{1}{2}} AB$.

$= 0,2 . 24 . 31,2010 = 149,765$.

Das macht auf die Pension von 100 Rthlr. für jeden der 576 Interessenten, $14976\frac{1}{2}$ Rthlr.

Aber

Aber dieſs iſt nun noch (nach *Satz* 7. §. 35.) durch die Multiplication mit $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ zu vermindern. Es iſt nämlich $x = \frac{22,3033-8,8977}{31,2010} = 0,43$; alſo $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,8151} = 0,9$. Alſo 0,9. 149,765 $=$ 134,789, das iſt auf 100 Rthlr. Penſion das gröſste Riſico 13478$\frac{1}{8}$ Rthlr.

## 37.

*Achter Satz. Wenn das gröſste Rifico unter die Intereſſenten vertheilet wird, ſo fällt auf jeden einzelnen davon*

$$\frac{0,2.\,m^{\frac{1}{2}}.\,AB\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{m} = \frac{0,2.\,AB\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}.$$

In dem vorher berechneten Beyſpiel würde ſolches bey den *Einſätzen* ausmachen $\frac{8613\frac{1}{2}}{570}$ Rthlr. $=$ 15 Rthlr. nahe.

Bey *jährlichen Beyträgen* $\frac{13479}{570}$ Rthlr. $=$ 23 Rthlr.

## 38.

Es flieſsen aus der vorhergehenden Unterſuchung folgende für die Praxis erhebliche Reſultate:

1) *Das Rifico*, was ein Entrepreneur über ſich nimmt, die Summe, die er zu verlieren wagt, und deren gleiche er gewinnen kann, iſt ſo ſehr groſs nicht für eine Commun, aber immer doch noch ſehr *erheblich*. Man ſieht

daraus, was die zu leiſtende *Garantie* auf ſich habe. Wer dieſe übernimmt, kann nach der Natur der Sache dafür nichts verlangen, ſo wenig als ein Spieler dafür, daſs er mit einem andern ſich auf ein Glücksſpiel einläſst, wobey keiner von beyden einen Vorzug hat. Er kann ſo viel gewinnen als verlieren, und muſs nur darauf ſehen, ob er eine ſo groſse Summe aufs Spiel ſetzen kann?

Allein er wagt noch eins mehr, nämlich ob die Renten auch nach ihrem wahren mittlern Werth bezahlet werden. Was mehr gegeben wird, hat die Caſſe ganz voraus; was daran fehlt, iſt ihr Nachtheil.

2) *Das Rifico iſt bey dem Beytragsfuſs etwas gröſser.* Das heiſst aber nicht, der Nachtheil ſey gröſser; ſondern nur, es wird etwas mehr aufs Spiel geſetzet.

3) *Das Rifico der Caſſe iſt gröſser, wenn die Zahl der Intereſſenten gröſser iſt.* Es wächſt in dem Verhältniſs der Quadratwurzel der Intereſſentenzahl. Wie bey jedem Glücksſpiel, gegen je mehrere jemand hält, deſto mehr kann er gewinnen, und verlieren. Sicher iſt es eine irrige Idee, die man hie und da antrifft, als wenn bey einer gröſsern Zahl von Intereſſenten der Verſorgungsanſtalt weniger riſquiret werde als bey einer kleinen, weil es alsdenn wahrſcheinlicher ſey, daſs das Abſterben mehr den angenommenen Mortalitäts-Tafeln gemäſs erfolgen werde. Allerdings wird bey mehreren Perſonen der *mittlere Werth* unter den *wirklichen Werthen, dem* nach den Tabellen *berechneten mittlern Werth*

*näher*

*näher kommen*, als bey einer kleinern Zahl; und dieſs zwar nach dem obigen ſo, daſs die Abweichung davon ſich verringert in dem Verhältniſs, in welchem die Quadratwurzel aus der Zahl der Perſonen zunimmt. Allein das iſt ganz ein anders. Dieſs hindert nicht, daſs nicht dennoch bey mehreren Perſonen auch mehr verloren, wie mehr gewonnen werden könne. Das Riſico ſelbſt ſteigt, das gröſste nämlich, in dem Verhältniſs mit der Quadratwurzel aus der Zahl der Perſonen.

4) *Das Riſico auf jeden einzelnen Intereſſenten vertheilt, wird kleiner, wenn die Geſellſchaft gröſser wird, und zwar nach demſelben Verhältniſs, nämlich der Quadratwurzel aus der Intereſſenten Anzahl.* Es wird immer gröſser für die ganze Geſellſchaft, aber kleiner für jeden Einzelnen. Daraus denn von ſelbſt erhellet, *es ſey in jedem Fall zweckmäſsiger, daſs die Geſellſchaft ſelbſt das Riſico übernehme*, ſelbſt ſich garantire. Nur muſs die Zahl der Intereſſenten nicht zu klein ſeyn. Iſt ſie groſs, ſo können die Einzelnen leicht ſo viel ohne ihre Beſchwerde wagen, als dabey zu wagen iſt. Wie bey *ausſterbenden* Geſellſchaften zu verfahren ſey, damit nicht das Riſico bey der kleinern, zuletzt übrig bleibenden, Zahl der Mitglieder, dieſe zu ſehr beläſtige, ſoll anderswo gezeiget werden. Wenn aber die Geſellſchaft ſich ſelbſt garantirt, ſo verſtehet ſichs, daſs auch der Gewinn der ihrige ſey. So bleibt auch die Geſellſchaft deſto mehr frey, und beläſtiget den Staat nicht. Nur

gegen

gegen Veruntreuung bey der Administration, und gegen Verlust der Gelder muss sie gesichert seyn. Wenn das Publicum einer Gesellschaft dieß beydes garantirt, umsonst oder gegen eine mäßige Vergeltung, so bedarf sie keines Beystandes mehr. Jedes Land und jede ansehnliche Stadt kann in sich selbst solche gesellschaftliche Verbindungen zur wechselseitigen Versorgung auf Todes- und Lebensfälle errichten, Es kommt nur darauf an, daß die Genossen ausser dem, was sie für die Renten zu erlegen haben, noch so viel mehr wagen wollen, als ihr Antheil an dem Risico der Gesellschaft austrägt. Dieß ist immer nur ein kleines Risico in Vergleichung mit dem, was ohne dieß jeder Einzelne bey seiner eigenen Rente übernimmt. Wer das letzte wagt, kann das erste leicht mit wagen. Beydes ist nach seinem Maximum leicht zu berechnen.

Vierte

# Vierte Abhandlung.

## *Von der Zuverläſsigkeit der gefundenen mittlern Gröſse.*

### I.

Es ſey die *wahre mittlere Gröſse*, $\mu$. Die aus N Beyſpielen *gefundene*, *m*. Der Unterſchied zwiſchen den äuſserſten Abweichungen auf beyden Seiten des mittlern Werths ſey *a*, das iſt, *die Summe der Abweichungen auf beyden Seiten;* und unter den an ſich möglichen Werthen ſey auch der $= 0$; ſo iſt die *gröſste an ſich mögliche Abweichung von der wahren mittlern Gröſse*, in einem *einzelnen* Beyſpiel, auf einer Seite $\mu$, und auf der andern $a - \mu$.

Die gröſste zu erwartende Abweichung des wirklichen Nm von $N\mu$ iſt ſo groſs *als das gröſste Riſico der Caſſe bey N Perſonen.* Das iſt $= 0,2.a.N^{\frac{1}{2}}$, wenn die beyden äuſserſten Werthe als gleich weit von dem mittlern Werth abſtehend genommen werden. (§. 34. der *Abhandl. von dem gröſsten Riſico der Caſſe.*) Hier ſind a und N, was dorten AB und *m* waren.

Sind die beyden äuſserſten Abweichungen von dem mittlern Werthe von verſchiedener Gröſse, ſo iſt die gröſste Abweichung bey N Fällen $= 0.2.N^{\frac{1}{2}}\, a(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$,

wo

wo $x$ die Differenz der beyden äuſserſten Abweichungen dividirt durch ihre Summe iſt, (§. 35. am angef. O.) oder $x = \frac{\pm a \mp 2\mu}{a}$ und $1 - x^2 = \frac{4\mu}{a} - \frac{4\mu^2}{a^2}$, und $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{a}\ \mu^{\frac{1}{2}}\ (a-\mu)^{\frac{1}{2}}$.

2.

Die *gröſste Abweichung*, welche bey N Perſonen *erwartet* werden kann, vorausgeſetzt nämlich, daſs man keinen beſondern Grund bey dieſen einzelnen habe, warum ſie vorzüglich mehr oder minder abweichen ſollten, von dem allgemeinen Geſetz, wornach alle zuſammen ſich richten, geht nur ſo weit, daſs $Nm = N\mu \pm o,2.\ N^{\frac{1}{2}}.\ a$, ſeyn kann, oder überhaupt, auch für den Fall, wo $\mu$ und $a-\mu$ ungleich ſind, daſs $Nm = N\mu \pm o,2.\ N^{\frac{1}{2}}.\ a.\ \frac{2}{a} \cdot\ \mu^{\frac{1}{2}}.\ (a-\mu)^{\frac{1}{2}}$, oder $m - \mu = \pm\ \frac{o,4.\ \mu^{\frac{1}{2}}(a-\mu)^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}}$, werde.

Dieſs iſt die Grenze, bis wie weit der Mittelwerth, den N Beyſpiele geben, von dem wahren mittlern Werth $\mu$, abweichen könne, nach der Erwartung nämlich, die Abweichung für die gröſste zu erwartende genommen. Es iſt damit nicht geſagt, daſs die Abweichung wirklich ſo groſs ſey.

Iſt der wahre Mittelwerth $\mu$ noch nicht bekannt, ſo läſst ſich ſolcher aus $m$ finden, wenn man dieſen für den

den am meiſten abweichenden annimmt. Die Gleichung

$m - \mu = \pm \frac{0,4.\ \mu^{\frac{1}{2}}(a-\mu)^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}}$ gehörig reducirt, und

$\frac{2mN + 0,16.a}{2(N+0,16)} = p$ geſetzet, giebt $q = N + 0,16$

$\mu = p + p\left(1 - \frac{Nm^2}{p^2 q}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Der Kürze wegen kann man hier vorausſetzen, daſs der wahre Mittelwerth $\mu$ in der Mitte liege zwiſchen den beyden äuſserſten möglichen Werthen in den einzelnen Fällen, oder daſs $\mu = a - \mu$. Iſt N eine etwas groſse Zahl, ſo wird die ſo berechnete Abweichung nie die gröſste an ſich mögliche übertreffen. (§. 35. *der Abhandl. vom Rifico*). Dagegen iſt man auch deſto mehr ſicher, daſs man ſie nicht zu klein genommen habe. Iſt aber $\mu = a - \mu$, ſo iſt *die gröſste zu erwartende Abweichung des Mittelwerths m von dem wahren*, oder

$m - \mu = \pm \frac{0,2.a}{N^{\frac{1}{2}}}$.

## 3.

*Iſt alſo N eine ſo groſse Zahl, daſs* $0,2\frac{a}{N^{\frac{1}{2}}}$ *keine erhebliche Gröſse mehr iſt, ſo kann die aus N gefundene mittlere Gröſse als die wahre angenommen werden.*

Gleichwohl wird die *äuſserſte zu erwartende Abweichung des Products* aus N in die gefundene Mittelgröſse, in jedem Fall, $= 0,2\ a.\ N^{\frac{1}{2}}$ ſeyn. Die Abweichung

der

der mittlern Gröſse ſelbſt, oder $m - \mu$ mag ſo unbeträchtlich ſeyn, als ſie will. So auch vorher bey dem Riſico, (§. 38. n. 3. *Abhandl. vom Riſico*).

## 4.

Hierauf beruhet eine Methode, *die mittlern Werthe der Lebensrenten aller Arten unmittelbar aus Erfahrungen zu ſuchen*, ohne daſs man nöthig habe, vorher Mortalitätstabellen zu machen. Einzelne Verſuche ſind von dem Herrn *Oeder* ſchon bey Wittwenrenten gemacht, und die Richtigkeit der Rechnung nach der *Süſsmilchiſchen* Tafel für unſere Gegenden dadurch beſtätiget. Im Allgemeinen geht das an. Am leichteſten bey Leibrenten; ſchwerer iſt es ſchon bey den Wittwenrenten und noch ſchwerer bey den andern zuſammengeſetztern, weil es bey dieſen ſchwer iſt, Beyſpiele genug aufzutreiben.

Es wird nämlich vorausgeſetzt, daſs die Beyſpiele N, aus denen man den mittlern Werth *m* ziehet, nicht insbeſondere zu einer ſolchen Claſſe gehören, bey der eine eigene Urſache eintritt, welche die Abweichung bey ihnen gröſser macht. Man darf nicht lauter Kranke noch lauter geſunde Perſonen ausſuchen. Es liegt in der Rechnung die Vorausſetzung zum Grunde, daſs bey jedem einzelnen Fall die *wirkliche Rente* mit *gleicher* Wahrſcheinlichkeit die verſchiedenen Werthe haben könne, die ſie bey allen haben kann; oder hier eigentlich, daſs

daſs dieſer Werth der gröſste oder der kleinſte, jeder mit gleicher Wahrſcheinlichkeit ſeyn könne, als ſie es ſeyn kann in den andern Fällen. Daher müſſen die Beyſpiele aus einem gemiſchten Haufen genommen werden, ohne Auswahl, ſo wie ſie im gemeinen Leben vorkommen.

5.

Und dennoch iſt es beſſer, zuvörderſt aus den Todtenliſten, die unmittelbare Beobachtungen ſind, zunächſt die *Sterblichkeitsordnung* zu ſuchen. Alsdenn hat man zugleich die Gründe, woraus alle Arten von Renten berechnet werden können. Solche Tafeln ſind ſo zu ſagen die Mittelpuncte, auf die man alle Erfahrungen zuſammenbringen und von denen man auch wiederum alles verlangte herholen kann. Eben dieſe ihre allgemeine Brauchbarkeit macht es auch nothwendig, daſs man ſie aus vielen Erfahrungen, aus mehreren Jahren, und aus mehreren Gegenden mache, das erſtere auch ſogar, wenn ſie nur bey einer beſondern Gegend gebrauchet werden ſollten. *Jede Zahl der Lebenden für jedes Jahr muſs eine Mittelzahl ſeyn aus mehreren.*

6.

Wie viele Beobachtungen nun aber für jede Art von Mittelgröſsen, die man ſuchet, erfordert werden, läſst ſich aus den Grenzen abnehmen, zwiſchen welchen der wirkliche Werth ſolcher Mittelgröſsen in den einzelnen Fällen liegt.

Iſt von der *mittlern Lebensdauer* einer Perſon von einem gewiſſen Alter, oder von *dem mittlern Werth ihrer Leibrente* die Rede, ſo wird das Sterberegiſter eines Landes oder einer groſsen Stadt, worinn das Alter beym Tode angegeben iſt, ſchon hinreichen, jene Werthe für die meiſten Altersjahre zu finden. Iſt zum Beyſpiel eine Perſon 20 Jahre alt, ſo fällt ihre künftige Lebensdauer zwiſchen 0, und zwiſchen der Altersergänzung, das iſt, wenn man 100 Jahr als das höchſte Alter annimmt, zwiſchen 0, und 80, Um nun die mittlere Lebensdauer bis auf *ein halbes Jahr* zu finden, muſs man ſo viele einzelne Beyſpiele haben, daſs 0, 2. 80, durch die Quadratwurzel der Zahl der einzelnen Fälle dividirt, kleiner als $\frac{1}{2}$ werde. Alſo ſind in dieſem Fall nur 1025 Beyſpiele erforderlich, von Perſonen, die nach dem 20ſten Jahre ihres Alters geſtorben ſind. Für ein gegebenes höheres Alter weniger und zwar in Verhältniſs des Quadrats der Altersergänzung.

Wenn man alſo aus Einem Lande und nur von Einem Jahr die Zahl der Geſtorbenen nach ihrem verſchiedenen Alter nimmt, ſo iſt die meiſten male dieſs ſchon genug. Nämlich um die mittlern Werthe für die Lebens lauer und die Leibrente zu finden. Es iſt aber nöthig, daſs die Geſtorbenen nach Quinquennien verzeichnet ſind. Allenfalls reicht es hin, wenn man ſie nach Decennien hat. Man kann alle Todten eines Sterberegiſters von Einem Jahr anſehen, als ſo viele, die *zugleich*

*mit*

*mit einander gebohren*, und nach und nach in verſchiedenen Jahren des Alters abgegangen ſind. Dieſs giebt einerley Verhältniſse mit dem, was wirklich geſchehen iſt. Sie ſind ſonſt in verſchiedenen Jahren gebohren, und in einem und demſelben abgeſtorben.

Z. B. In dem Jahr 1784 iſt die Zahl der Geſtorbenen in den beyden Herzogthümern *Schleswig* und *Hollſtein*, nach Decennien, folgende geweſen.

*Vom männlichen Geſchlecht.*

| Vom Alter | Zahl | Vom Alter | Zahl |
|---|---|---|---|
| 0 — 10 | 3386 | 60 — 70 | 822 |
| 10 — 20 | 339 | 70 — 80 | 628 |
| 20 — 30 | 477 | 80 — 90 | 248 |
| 30 — 40 | 484 | 90 — 100 | 25 |
| 40 — 50 | 629 | und darüber | Summ. 7736 |
| 50 — 60 | 698 | | |

*Vom weiblichen Geſchlecht.*

| Vom Alter | Zahl | Vom Alter | Zahl |
|---|---|---|---|
| 0 — 10 | 2908 | 60 — 70 | 741 |
| 10 — 20 | 343 | 70 — 80 | 722 |
| 20 — 30 | 457 | 80 — 90 | 325 |
| 30 — 40 | 600 | 90 — 100 | 51 |
| 40 — 50 | 573 | | Summ. 7334 |
| 50 — 60 | 614 | | |

Wird angenommen, daſs ſie in jeder Claſſe in der Mitte des Jahrzehends, wozu ſie gehören, geſtorben ſind, und darnach die *mittlere Lebensdauer* berechnet, ſo erhält man folgende Reſultate.

*Die mittlere Lebensdauer.*

| Für das *männliche Geſchlecht.* | *Nach Süſsmilch im Allgemeinen.* | Für das *weibliche Geſchlecht.* |
|---|---|---|
| Vom Alter 0 Jahr 31, 25 | 29 | — 33,5 |
| — — 10 — 41, 66 | 42 | — 42,0 |
| — — 20 — 34, 75 | 35 | — 35,0 |
| — — 30 — 28, 7 | 28, 5 | — 29,1 |
| — — 40 — 22, 5 | 22, 5 | — 23,8 |
| — — 50 — 17, 0 | 17,0 | — 18,6 |
| — — 60 — 12, 0 | 12,0 | — 13,2 |
| — — 70 — 7, 2 | 8,2 | — 8,9 |
| — — 80 — 6, 0 | 5,5 | — 6,4 |
| — — 90 — 5, 0 | 3,0 | — 5,0 |

Man wird nicht leicht eine gröſsere Uebereinſtimmung verlangen, ausgenommen bey dem Alter von 90 Jahren. Und doch iſt die Vorausſetzung, daſs alle in der Mitte des Decennii abgegangen, ſchwerlich genau genug. Dieſs giebt für die jüngern etwas zu viel, für die bis 60 Jahren zu wenig, und für die ältern noch mehr zu viel. Wenn man darauf Rückſicht nimmt, ſo iſt die Uebereinſtimmung mit *Süſsmilch* noch gröſser.

Nur daſs die Werthe bey dem *weiblichen Geſchlecht* durchaus in jeder Claſſe gröſser fallen als bey dem *männlichen*, beſtätigt die mindere Sterblichkeit des erſtern. Der Unterſchied iſt zwar nicht ſehr erheblich, aber doch nicht zu vernachläſsigen.

Was die Werthe der *Leibrenten* betrifft, ſo iſt klar, da der Unterſchied bey der mittlern Lebensdauer ſo gering iſt, ſo werden auch die auf eine ähnliche Art

geſuchten

geſuchten *Leibrenten* nahe zutreffen. Dieſe laſſen ſich alſo auch unmittelbar aus den Verzeichniſſen berechnen. Aber es ſind dann die gebrauchten Verzeichniſſe ſelbſt Mortalitätstafeln, oder vertreten hier, ſo weit es nöthig iſt, ihre Stelle.

## 7.

Soll auf eine ähnliche Art der mittlere Werth einer *Wittwenrente* geſucht werden, ſo iſt die erforderliche Zahl der Erfahrungen, von denen man annehmen kann, daſs ſie ſo gemiſcht ſind, als ſie ſeyn müſſen, ſchon ſchwerer zuſammen zu bringen. Es iſt für die Wiſſenſchaft immer beſſer, wie vorher ſchon erinnert, zuvörderſt eine *Mortalitäts-Tabelle* zu ſuchen. Ich will mich daher nicht länger aufhalten, und nur noch etwas über die Frage hinzuſetzen: *wie viele und wie vieljährige Verzeichniſſe erfordert werden, um eine zuverläſsige Sterblichkeits-Ordnung einzurichten?*

Vorerſt iſt zu bemerken, daſs eine Todtenliſte, die man aus einer Stadt, oder Gemeine, oder Herrſchaft von Einem Jahr erhält, hier für nichts mehr als für eine einzelne Erfahrung gelten kann. Es können auch nicht ganz kleine Gemeinen, wo überhaupt die Zahl der Todten im Jahr unter 100 iſt, dahin gerechnet werden. Doch laſſen ſich dieſe mit andern kleinern zuſammenziehen. Dieſs ſind alsdenn die Verzeichniſſe, davon jedes eine einzelne Tabelle für das einzelne Jahr giebt.



Digitized by Google

*Auch iſt es nothwendig, daſs man die zu einer und derſelben Gemeine gehörigen Perſonen zuſammen laſſe.* Man kann kein Verzeichniſs gebrauchen, worinn die jünger Geſtorbene aus mehreren Gemeinen, und die älter Geſtorbene nur aus einigen von ihnen, oder umgekehrt, gebracht ſind; die Zahl, die man nimmt, mag ſo groſs ſeyn als man will. Nicht einmal ſolche Städte und Gemeinen, in die viele Fremde jährlich zukommen, oder aus denen Eingebohrne wegziehen, geben brauchbare Verzeichniſſe. Es muſs wenigſtens vernünftige Critik hinzukommen, und die Verzeichniſſe ändern, wie *Simpſon* es mit den Londoner Regiſtern gemacht hat. Dieſs mindert doch in jedem Fall die Zuverläſsigkeit.

Nach dieſen Erinnerungen können die geſammten beſondern Verzeichniſſe aus unſern beyden Herzogthümern von Einem Jahr hier für nicht mehr, als etwan für funfzig Beobachtungen gelten, wenn eine Sterblichkeits-Ordnung daraus gemacht werden ſoll.

Man braucht ſolche aber bis 1600, um ſicher zu ſeyn, *daſs die Zahlen, welche die Lebenden von beſtimmtem Alter in der Tabelle angeben, nicht um ein halbes Jahr zu hoch oder zu niedrig ſtehen.* Die Sache läſst ſich ſo vorſtellen. Ein gewiſſer Theil der Gebohrnen geht ab innerhalb gewiſſer Jahre, nach der wahren mittlern Zahl, wie z. B. $\frac{1}{4}$tel nach *Süſsmilch* im erſten Jahr, und $\frac{10}{1000}$, in 18, und $\frac{7}{10}$ in 50 Jahren; wie

groſs

groſs muſs nun die Menge der Erfahrungen dieſer Art ſeyn, um ſicher folgern zu können, daſs die aus ihnen gefundene mittlere Zeit des Abgangs dieſer Theile nicht um ein halbes Jahr von der wahren mittlern Zahl der Jahre abweiche?

Für den Abgang von 0, 7 der Gebohrnen, die innerhalb 50 Jahren abgehen nach der *Süſsmilchiſchen* Tabelle, ſchlieſset man ſo. Es können ſo viele, als dieſer Theil beträgt, abgehen gleich nach der Geburt. Dieſs iſt das eine Aeuſserſte. Es können aber auch ſo viele übrig bleiben bis ins höchſte Alter, was hier der Kürze wegen auf 100 Jahr geſetzet wird. Dieſs iſt das zweyte Aeuſſerſte des an ſich möglichen. In dieſem Falle ſtehen beyde von dem wahren Mittel gleich weit entfernt. Nimmt man nun N verſchiedene Fälle, in denen $\frac{7}{10}$ abgegangen ſind, früher und ſpäter, ſo kann die zu erwartende gröſste Abweichung der aus dieſen N Erfahrungen genommenen mittlern Zeit, von der wahren nur $\frac{0,2.100}{N^{\frac{1}{2}}}$ ſeyn. Dieſs ſoll nun weniger als $\frac{1}{2}$ ausmachen. Folglich muſs N gröſser als 1600 ſeyn.

Nach *Süſsmilch* ſiud in 18 Jahren von den Gebohrnen abgegangen $\frac{5001}{10000}$, dafür man $\frac{1}{2}$ ſetzen kann. Dieſer Theil kann gleichfalls in dem einen äuſserſten Fall abgehen im Jahr 0, und in dem andern nach 100 Jahren. Alſo iſt wiederum der Abſtand oder Unterſchied der beyden äuſserſten Fälle, das iſt, a = 100, und N

muſs 1600 ſeyn, wenn die gröſste Abweichung der in N Erfahrungen gefundenen mittlern Zeit kleiner als $\frac{1}{2}$ Jahr ſeyn ſoll. Allein hier ſind die beyden Extreme ungleich von dem wahren Mittel entfernt, das eine 18, das andere 82 Jahre, und alſo iſt $\frac{82-18}{100} = 0,64 = x$. (§. 1.) Folglich $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 0,77$, und $0,77.1600 = 1212$. So viele Beyſpiele ſind in dieſem Fall nur erforderlich. Man braucht bey dem jüngern und ältern Alter alſo weniger als 1600 Fälle.

Aus den Herzogthümern Schleſswig und Holſtein würden alſo Verzeichniſſe von 32 Jahren erfordert werden, um die allgemeine Mortalitätstafel für ſie genau einzurichten, wenn man nur funfzig aus Einem Jahre rechnet. Aber Dännemark dazu genommen, was mit den Herzogthümern einerley Sterblichkeit hat, ſo kann man mit 8 bis 10 Jahren abkommen, weil dieſs Reich jedes Jahr etwan 140 bis 150 brauchbare Erfahrungen liefert.

Es werden die hieſigen Verzeichniſſe nur nach Decennien gemacht. Daraus kann alſo auf die erwähnte Art nur das Decennium des Abgangs gefunden werden. Die Einheit iſt 10 Jahre, und $a = 10$. Das giebt $N = 164$. Allein dann iſt $\frac{1}{2}$, als die noch übrige Abweichung des gefundenen mittlern Decennii von dem wahren, auch ſelbſt die Hälfte eines Decennii. Um alſo die Abweichung innerhalb eines halben Jahrs zu beſchränken, ſind wiederum

wiederum 1600 Beobachtungen erforderlich, wie vorher. Und dann hat man nur noch die Decennien.

Iſt man aber hiemit zur Richtigkeit, ſo können die jährlichen Abgänge, in den Decennien, jeder wiederum als ein Ganzes betrachtet werden, deſſen verſchiedene Theile auf die einzelnen Jahre fallen. Um dieſe Jahre zu finden, muſs man ſpeciellere Todten-Verzeichniſſe haben, in denen das Alter bis auf einzelne Jahre angegeben iſt, will man anders nicht mit willkührlichen Interpolationen zufrieden ſeyn. Für jedes Jahrzehend gebraucht man über 16, wenn es bis auf $\frac{1}{2}$ Jahr für jeden beſondern Theil getroffen ſeyn ſoll. Denn hier iſt $a = 10$. So viele Fälle kann man aber aus jedem einzelnen Jahr erhalten. Es könnte alſo ein ſo genaues Verzeichniſs eines einzelnen Jahres aus einem Lande hinreichen, um die Tabelle bis auf die einzelne Jahre zu bringen, wenn die Zahlen für die Decennien vorher ſchon beſtimmt ſind.



Digitized by Google

## Fünfte Abhandlung.

### *Ueber die Aufgabe: Wie der Ueberschuſs oder der Mangel bey einer Wittwencaſſe den Intereſſenten zu berechnen ſey?*

### Inhalt.

*Zweck der Aufgabe, und worauf es dabey ankomme.* 1. 2.

*Wie der Zuſtand der Caſſe zu berechnen.* 3.

*Wie der Ueberſchuſs auszumachen, der bey der Caſſe entbehrlich iſt, ingleichen der Mangel, der nothwendig erſetzet werden muſs.* 4 — 16.

*In welchem Verhältniſs der Ueberſchuſs und die Defecte den Intereſſenten zu berechnen ſind.* 17 — 29.

*Was, im Fall das Inſtitut nach fehlerhaften Tabellen berechnet, zu thun ſey, und wie, wenn es aufgegeben werden muſs, die Intereſſenten auseinander zu ſetzen.* 21 — 27.

*Anmerkung über die Auseinanderſetzung bey der vorigen Calenbergiſchen Wittwenverpflegungs-Geſellſchaft.* 28.

*Warum inſonderheit bey der veränderten Calenbergiſchen Geſellſchaft dieſe Aufgabe wichtig iſt.* 29. 30.

*Wie bey dieſer letzten die Berechnung des Ueberſchuſſes anzuſtellen?* 31 — 37.

### I.

Dieſe Aufgabe kommt bey der *veränderten Calenbergiſchen Wittwenverpflegungsgeſellſchaft* vor. Denn nach dem neuern unter dem 14ten May 1783 vorgelegten und

und nachher bestätigten Plan soll aller Ueberschuss bey der Casse den Interessenten zu gute gerechnet werden, nicht nur der, der aus den Einsätzen und Beyträgen der Genossen erwächst, sondern auch das, was von dem *landschaftlichen Zuschuss*, den man den Interessenten zu ihrer Erleichterung zugestanden hat, übrig seyn wird. Dagegen sind die auf Beyträge stehende Genossen verpflichtet, wenn die Casse zu kurz kommt, den Defect durch eine Erhöhung der Beyträge auf 5 Procent zum Theil wieder gut zu machen, auch die Wittwen müssen in diesem Fall 5 Procent, und nach dem Abgang aller Ehen 10 Procent, von ihren Pensionen sich abziehen lassen. So ist die Grenze, bis wohin die Erstattung gehen soll, festgesetzt. Geht der Verlust darüber hinaus, so übernimmt ihn die Landschaft als Garant der Casse. Die Versicherung, dass aller Ueberschuss den Interessenten zu gute kommen soll, ist hier von Wichtigkeit. Man hat sich in Rücksicht auf diese gefallen lassen, nach schweren Tabellen die Einsätze und Beyträge zu zahlen. Es beruht auch darauf der Vorzug dieser Gesellschaft vor allen ähnlichen, die wir haben. Die Interessenten bezahlen sicher nicht mehr, als wirklich der Zweck erfordern wird. Nichts für die Garantie. Was übrig ist, ist das ihrige. Kommt die Casse zu kurz, so stehen sie für nichts weiter, als bis auf die vorher erwähnte Grenze. Ohne diese Bedingung, gestehe ich, würde ich keinen Grund gefunden haben, mich auf das Institut von neuem

einzu-

Digitized by Google

einzulaſſen, und noch weniger andere dazu aufzumuntern.

Dieſelbe Frage wird künftig vielleicht bey mehreren ſolchen Geſellſchaften vorkommen. Sollen dieſe häufiger errichtet, und der Nutzen in ſeinem ganzen Umfange erhalten werden, der aus ſolchen wohlthätigen Verbindungen entſtehen kann, ſo müſſen ſie nie eine Art von Finanzoperationen für den Staat werden, noch auf ein Spiel eines Entrepreneurs mit einer Geſellſchaft hinauslaufen. Das gemeine Weſen darf auch mit der Gewährleiſtung nicht beſchweret werden. Die Geſellſchaft leiſtet ſich ſolche am beſten ſelbſt, ohne Gefahr und mit Erwartung künftiger Erleichterung, wenn nur die anfängliche Zahl der Intereſſenten erheblich iſt, wenn Vorſichtigkeit bey der Aufnahme der Mitglieder beobachtet, alles nach guten und ſichern Mortalitätstafeln berechnet, und nur Sicherheit für eine treue Adminiſtration da iſt. Es iſt ſehr vernünftig, daſs ſo viel gezahlet werde, als der Zweck, den man hat, erfordert. Wo ſich das aber nicht ſo völlig genau beſtimmen läſst, und auch, weil man doch immer auf widrige Zufälle voraus denken muſs, iſt es Klugheit, lieber etwas zu viel als zu wenig in Anſchlag zu bringen. Allein warum ſoll ich mehr geben, als dieſer Zweck nothwendig macht, und warum ſoll das Anfangs der gröſſern Sicherheit wegen zu viel gegebene nicht zurück gegeben werden, wenns nicht gebraucht wird? Die Verwaltung der Caſſe,

die

die Rechnungsführung und die Beſorgung der geſellſchaftlichen Angelegenheiten erfordert allerdings noch etwas Koſten mehr, die aber nicht erheblich ſeyn müſſen. Dieſe ſind für ſich, und können gleich anfangs feſtgeſetzet werden, haben aber mit dem Ueberſchuſs oder Mangel der Caſſe nichts zu thun. Soll etwas für die Garantie der geſellſchaftlichen Caſſe gegen Betrug und Verluſt bezahlet werden, ſo iſt auch dieſs etwas für ſich, von dem übrigen abgeſondert. Hier iſt obrigkeitliche Autorität und Aufſicht nützlich, zuweilen gar nothwendig. Dieſe Nebenausgaben könnten nach Billigkeit mehr dem Theil der Geſellſchaft aufgeleget werden, der wirklich bey dem Erfolge gewinnet, nämlich den Penſioniſten. Aber wenn man ſie auch durch alle gleich vertheilen will, ſo gehören ſie nicht zu denen, wovon hier die Rede iſt.

## 2.

Die Aufgabe iſt ganz allgemein. Ich will ſie hier aber auf *Wittwencaſſen* einſchränken. Sie kann auf dieſelbe Art bey jeder Verſorgungsanſtalt beantwortet werden. Es wird allemal auf folgende Puncte ankommen.

1) *In jedem Termin iſt der Zuſtand der Caſſe*, was ſie *baar* hat, was ſie *zu erwarten*, und was ſie dagegen *auszugeben* hat, *auszumachen*. Daraus ergiebt ſich der Ueberſchuſs oder der Mangel.

2) Es

2) Es ist auszumachen, *was von dem Ueberschuss als entbehrlich* bey der Casse angesehen werden kann, ohne dass auf den etwanigen künftigen Verlust Rücksicht zu nehmen sey? Eben so in Rücksicht des entstandenen *Defects*, *wie viel so gleich davon als unentbehrlich zu ersetzen sey?*

3) Dann ist zu bestimmen, in welchem *Verhältnisse beydes unter die Interessenten der Gesellschaft zu vertheilen sey?*

## 3.

Bey dem ersten Punct ist keine Schwierigkeit. Auch ist die Rechnung nicht einmal mühsam, wenn sie nur gleich vom Anfang darnach eingerichtet wird. Ich will hier nur ganz kurz angeben, worauf es ankomme. Hr. Hofrath *Karsten* hat in seiner *Theorie von Wittwencassen*, in dem VIIten Abschnitt, dies ausführlicher und deutlicher auseinander gesetzet.

Die *Activa der Casse* sind nämlich: 1) *die baaren Einnahmen*, an Einsatzgeldern, oder an Beyträgen, und was daraus an Zinsen und Zinsen von Zinsen, nach dem angenommenen Zinsfuss erwachsen ist.

Die Abrechnung wird jedesmal entweder am Schluss des vorhergehenden Termins oder nach dem Anfang des folgenden gemacht. Das ist entweder vor dem Empfang der neuen Beyträge und vor der Auszahlung der in dem Termin dermalen fälligen Wittwenpensionen, nachdem schon

schon die Nachrichten von den neuentstandenen und abgegangenen Wittwen, und von den durch den Tod ihrer Frauen abgetretenen Ehemännern eingegangen sind; oder sie wird gemacht, wenn Einnahme und Auszahlung schon geschehen sind. Am natürlichsten ist das erste, jedoch kann auch das letzte anderer Ursachen wegen bequemer seyn.

Wenn die auf Beytragsfuss eingetretene Mitglieder eine gewisse Summe als Hypothek zur Casse bringen, die aber nach der Trennung der Ehe zurück gegeben wird, und davon die Zinsen jedesmal als ein Theil der Beyträge angesehen werden, eine Einrichtung, die aus mehreren Gründen zu empfehlen ist, so gehören diese Gelder nicht zu dem Bestand der Casse, sondern sind blos ein Depositum, oder eigentlich eine nothwendige Anleihe, die der Casse bis zur Trennung der Ehe zu machen ist, und die zugleich zur Hypothek dient.

2) *Die baaren Werthe der Eherenten von den noch bestehenden Ehen*, nach der Grösse der Beyträge. Ihre Werthe ändern sich, so wie die Ehepaare älter werden. Sie können sehr leicht nach den angenommenen Tabellen berechnet werden.

Von denen, die auf einmal Einsätze erlegt haben, empfängt die Casse nichts mehr. Aber die auf Beyträge stehen, zahlen das ihrige durch diese Eherenten, die so gross sind, als die Beyträge, zu welchen sie Anfangs

angesetzet

angeſetzet ſind. Dieſe Eherenten machen die künftige Einnahme der Caſſe von dieſen Mitgliedern aus.

1) *Die Paſſiva der Caſſe beſtehen aus den baaren Werthen der fälligen Leibrenten der vorhandenen Wittwen*, welche ſich ebenfalls von Termin zu Termin ändern. Jedoch iſt dabey zu merken, daſs wenn die Rechnung am Schluſs des vorhergehenden Termins gemacht wird, ſo iſt die nächſte Hebung der Wittwenpenſionen eine *baar* und *gewiſs* auszuzahlende *Schuld*. Dieſe iſt alſo auch beſonders zu rechnen, und dann dazu der Werth der Leibrente für die Wittwen, nach jeder ihrem dermaligen Alter, als künftige Ausgabe anzuſehen. Hiebey kommt auch das *Wiederverheyrathen* in Betracht, ſo ferne gleich Anfangs bey Berechnung der Wittwenpenſionen darauf gerechnet iſt. In demſelben Verhältniſs, wie es da gerechnet iſt, muſs es auch in der Folge gerechnet, und alſo von den Leibrentenwerthen dafür etwas abgezogen werden.

2) *Der Werth der eventuellen Wittwenpenſionen der Ehefrauen, deren Männer noch leben.* Dieſe Werthe ändern ſich gleichfalls mit dem Alter der Paare.

Wenn man vom Anfang an bey der Rechnungsführung für jedes Paar auſser den Columnen des *Alters*, noch eine für den *Werth der künftigen Eherenten*, und eine für *den Werth der künftigen eventuellen Wittwenpenſionen*, und bey jeder vorhandenen Wittwe den Werth

*der*

Digitized by Google

*der künftigen Leibrente* zur Seite ſetzet, ſo läſſet ſich bey jedem neuen Termin, was in dieſen Werthen zu ändern iſt, aus den Tabellen ohne viele Mühe finden. Was dabey etwan noch mehr zu erinnern iſt, ſieht ein in ſolchen Sachen ein wenig geübter Rechnungsführer von ſelbſt. Wenn dergleichen vollſtändige Aufrechnung alle halbe Jahre zu machen wäre, was gar nicht nöthig iſt, ſo könnte noch die Frage entſtehen, wie die *halbjährlichen Zinſen* der vorräthigen Gelder in Anſchlag zu bringen ſind? Es kommt auf den zum Grunde gelegten Zinſenfuſs an, wo bey groſsen Summen es freylich nicht einerley iſt, ob 2 Procent halbjährlich, oder 4 Procent jährlich zu rechnen ſind.

## 4.

Mehr Schwierigkeiten finden ſich bey dem zweyten Punct. (§. 2.). Bey der Frage nämlich: *ob der Ueberſchuſs oder Mangel, der ſich beym Abſchluſs der Rechnung in einem gewiſſen Termin findet, von dem künftigen Erfolg ſich trennen laſſe, und jener als entbehrlich zurückgegeben, dieſer als etwas nie entbehrliches von den Intereſſenten erſetzet werden müſſe?* Iſt es nämlich erlaubt, eine ſolche Abweichung bloſs für eine Folge der Tabellen anzunehmen, die entweder zu viel oder zu wenig von den Intereſſenten gefordert haben? Oder iſt es bloſs günſtiger oder ungünſtiger *Zufall* in dem beſondern Termin, und wie weit darf oder muſs erwartet

werden, dafs in den folgenden Terminen eine Abweichung von gleicher Gröfse auf die entgegengefetzte Art fich finden werde?

## 5.

Man fetze Anfangs die *Garantie* der Caffe bey Seite, oder nehme an, die Gefellfchaft habe fich felbft garantirt, das ift, die Intereffenten haben es übernommen, aufser ihren tabellarifchen Leiftungen fo viel nachzufchiefsen, als die Caffe zu kurz kommen mögte.

Ferner fey Anfangs die Aufgabe auf eine Gefellfchaft eingefchränkt, die aus *gleichen Paaren* befteht, die alle auf einerley Fufs, und zwar auf *Capitalfufs* eingetreten find. Sie läfst fich nachher leicht auf andre erweitern.

## 6.

Ueberhaupt ift es für fich klar, wenn immerfort dieſelbige Zahl der Intereffenten in der Gefellfchaft bleiben könnten, die von Anfang an zufammen gekommen find, bis ganz zu Ende aus, bis nämlich der ganze Zweck erfüllet ift, da denn ftatt der abgehenden *Ehemänner*, *ihre Wittwen* als *Intereffenten* eintreten, fo könnte in jedem Termin der gefundene Ueberfchufs oder Mangel vertheilet werden, fie mögten entftanden feyn, aus welcher Urfache man will. Nur müfste die Caffe Sicherheit von jedem in Händen haben, dafs die etwan nöthigen Nachfchüffe geleiftet werden. Dann würde es auch einerley

feyn,

Digitized by Google

ſeyn, ob man terminlich, oder am Ende erſt die Abrechnung machte. Doch weil am Ende keiner der Intereſſenten den Vortheil ſelbſt genieſsen könnte, ſo würde die terminliche Vertheilung zu rathen ſeyn, wenn ſichs der Mühe verlohnte; wenn das nicht iſt, ſo kann der Ueberſchuſs wie der Mangel den Erben überlaſſen werden.

Das iſt nun freylich nicht ſo. Es gehen immer Intereſſenten ab, wenn gleich die Wittwen auch zu ihnen gerechnet werden. Allein ſo viel folgt unmittelbar aus dem angenommenen Fall, daſs es in dem wirklichen Fall *bloſs auf die Abrechnung mit den abgehenden Intereſſenten ankomme.* Ob nämlich diejenigen, welche noch bey der Geſellſchaft bleiben, die andern, welche austreten, an dem Ueberſchuſs zur Zeit des Austritts Antheil nehmen laſſen, und im Fall des Defects auch Erſtattung deſſelben von ihnen fodern können, oder nicht?

Wenn der Mann ſtirbt, und die Frau als *Wittwe* am Leben bleibt, ſo kann dieſe noch als *mitgarantirendes Mitglied* angeſehen werden. Es kann aber auch anders verabredet ſeyn. Das erſte iſt das natürlichſte, ſo will ichs hier auch annehmen. Alsdenn wird ſich die Zahl der garantirenden Intereſſenten nach der Zahl der noch lebenden *Frauen* richten, ſie mögen als *Ehefrauen* leben, oder als *Wittwen.* Ob ſie im Wiederverheyrathungs-Fall austreten ſollen, kommt auch auf eine

besondere Bestimmung an, die hier gleichfalls bey Seite gesetzet wird. Demnach ist *die Zahl der garantirenden Interessenten so gross als die Zahl der Frauen, die von den anfänglich eingetretenen Ehen noch am Leben sind.* Es gehören nämlich dahin, die Ehemänner, deren Frauen noch am Leben sind, und die vorhandenen Wittwen.

## 7.

Um nun aber zu festen Grundsätzen zu kommen, wornach sich beurtheilen läßt, wie fern ein Ueberschuss, der sich nach einiger Zeit bey der Casse zeiget, entbehrlich sey, oder nicht? Ingleichen bey einem sich eräugenden Mangel, wie ferne solcher nothwendig zu ersetzen sey oder nicht? muss folgendes erwogen werden.

Es kann eine Abweichung des wirklichen Erfolgs von den Tabellen daher entstehen, weil die Tabellen unrichtig sind. Diese kann *die Abweichung der Tabellen* heissen. Sie entsteht, wenn die *wahre mittlere Gröfse* in den Tabellen nicht getroffen ist, wenn die tabellarischen Werthe der Leibrenten und Verbindungsrenten nicht die wahren mittlern Werthe sind, oder hier bey den Wittwencassen, wenn die *Einsätze* oder *Beyträge* zu hoch, oder zu niedrig gerechnet sind. Dahin gehört bey Würfelspielen ein Fall, wie folgender. Wenn jemand, der für jedes Auge, das er mit einem gewöhnlichen sechsseitigen Würfel wirft, von dem Entrepreneur Einen Thaler empfangen will, seinen Wurf mit 3 bezah-

bezahlet hat. In dieſem Fall giebt er zu wenig. Er kann 1, 2, 3, 4, 5, 6 werfen, und jeder dieſer Würfe iſt gleich wahrſcheinlich. Der eigentliche Werth ſeines Wurfs iſt $3\frac{1}{2}$. Ein Entrepreneur verlieret bey den Würfen, auch in dem Fall, wenn bey einer Menge derſelben jedes Auge gleich oft fällt, wie es nach der vorausgeſetzten Wahrſcheinlichkeit fallen ſoll.

*Wenn die Tabellen nicht abweichen*, ſo iſt *weder Ueberſchuſs noch Mangel zu erwarten*, das iſt, es hat weder jenes noch dieſes einen Werth nach der Natur der Sache. Berechnet man alle Werthe der möglichen Gewinne, die nämlich am Ende übrig bleiben, das iſt, die *reinen Gewinne*, oder wird jeder ſolcher möglichen Gewinne in ſeine Wahrſcheinlichkeit multiplicirt, und eben ſo die *Werthe des möglichen Verluſtes*, oder der negativen Gewinne, ſo hebt ſich beydes zuſammen genommen gegen einander auf.

Dagegen wenn die wahre mittlere Gröſse nicht angenommen iſt, ſo iſt der Werth des möglichen reinen Gewinns dem Werth des reinen Verluſtes nicht gleich. Und alſo je nachdem jener oder dieſer gröſser iſt, hat entweder die Erwartung, daſs mehr gewonnen als verloren werde, oder umgekehrt, einen beſtimmten Werth, der nicht Null iſt.

Dieſs iſt eine Folge von demjenigen, was in der Abhandlung *über das Riſico der Caſſe* geſagt iſt. Es

 erhellet

erhellet aber auch unmittelbar aus der Natur der Sache. Es ist eine Wahrscheinlichkeit da, am Ende gewonnen zu haben, und diese hat einige Gröfse; und zwar *am Ende* gewonnen zu haben, die einzelnen Fälle, worinn gewonnen und verloren ist, gegen einander aufgerechnet. Eben so verhält es sich mit der Wahrscheinlichkeit, am Ende verloren zu haben. Allein die Erwartung des Gewinns ist der des Verlustes gleich.

Wenn das nicht ist, und sich das ausmachen läfst, so ist es ein sicheres Zeichen, dafs in den Tabellen eine Abweichung liege. Der Unterschied zwischen den beyden Erwartungen ist jedesmal so grofs, als das Product aus dem Unterschiede zwischen der wahren mittleren Gröfse, welche die Casse hätte haben sollen, und der, welcher sie eigentlich empfangen hat, in die Zahl der Interessenten multiplicirt.

## 8.

Eben so gewifs ist aber auch dieſs. *Wenn die Tabellen so richtig sind, als sie ihrer Natur nach seyn können, so bleibet ein gewisses Risico übrig für die Casse.* Das ist: Es giebt eine *Erwartung zu gewinnen* von einer gewissen Gröfse, und eine *Erwartung zu verlieren*, die hier jener gleich ist. Mit andern Worten. So richtig die Tabellen auch sind, so bleibet etwas dem Zufall unterworfen, der mit gleicher Wahrscheinlichkeit günstig oder ungünstig ausfallen kann. Er falle, wie er wolle,

so

ſo folget daraus nicht, daſs in den Tabellen die wahre Mittelgröſse verfehlet ſey.

Die *Erwartung des Gewinns* hat die Gröſse, daſs wenn jemand mit der Caſſe den Contract macht, allen reinen Ueberſchuſs zu empfangen, der am Ende da iſt, ohne jedoch ihr dagegen etwas zu erſetzen, im Fall ſie zu kurz kommt, ſo muſs er für ſeine Erwartung ſo viel ihr baar auszahlen.

Die *Erwartung des Verluſtes* iſt ſo groſs als die Summe, welche die Caſſe an einen Entrepreneur zahlen müſste, der ihr vor allem Mangel einſtehen, dagegen nichts von ihrem Ueberſchuſs haben wollte. Wer aber beydes Ueberſchuſs und Mangel für ſich haben will, hat nichts zu zahlen, noch zu empfangen. Alles nämlich unter der Vorausſetzung, daſs in den Tabellen ſelbſt keine Abweichung ſtatt findet.

## 9.

Daraus flieſsen dieſe zwey Grundſätze.

1) *Iſt in einem der folgenden Termine, nach dem Anfang der Geſellſchaft, ein Ueberſchuſs in Caſſe,* (nach den Tabellen die Rechnung gemacht) *welcher gröſser iſt, als das Riſico der Caſſe, ſo iſt der Unterſchied zwiſchen jenem und dieſem, ſicher entbehrlich.*

Denn iſt der Ueberſchuſs gröſser als das Riſico, ſo nehme man den Theil davon ab, der ſo groſs iſt, als

das letztere. Für dieſen Theil kann die Caſſe aufs künftige für allen Verluſt geſichert werden, und hat noch die Erwartung, künftig zu gewinnen. Was übrig iſt, iſt alſo ganz entbehrlich.

Wer dieſs leugnet, muſs die Tabellen für die Zukunft als unrichtig anſehen. Denn ſind die Tabellen für die Zukunft richtig, ſo iſt die *Erwartung des künftigen Verluſtes* für ſich allein nicht gröſser, als das erwähnte Riſico, für deſſen Zahlung die Garantie erkaufet werden kann. Es iſt nicht die Frage, ob jemand ſich mit einem ſolchen Handel abgeben werde; genug das iſt der wahre Werth der Natur der Sache nach. Iſt aber die Caſſe gegen allen künftigen Verluſt geſichert, ſo bedarf ſie nichts mehr.

## 10.

Wenn der Ueberſchuſs gröſser iſt, als das Riſico für die Zukunft, ſo kann doch daraus noch nicht geſchloſſen werden, *daſs die Tabellen fehlerhaft ſind, woferne nicht der Ueberſchuſs mehr beträgt als das Riſico der Caſſe in dieſem Termin, und das Riſico im Anfang der Geſellſchaft zuſammengenommen.* Denn es iſt dieſer Ueberſchuſs noch kein *reiner Ueberſchuſs*, ſondern nur ein *partieller* aus einem Theil der Fälle entſtanden. Es kann künftig noch ſo viel wieder verloren werden, als das Riſico groſs iſt von dem Termin der Abrechnung an bis Ende aus, das iſt, bis alle gegenwärtige Intereſſenten abgegangen ſind;

Digitized by Google

ſind; und dieſs der Richtigkeit der Tabellen ohnerachtet. Geſchieht nun aber ſolches, ſo geht ſo viel wiederum von dem Ueberſchuſs ab, und was denn übrig bleibt, iſt ein *reiner endlicher Gewinn*, der noch nicht gröſser iſt, als die Erwartung zu gewinnen im Anfang war, und der mit der Richtigkeit der Tabellen beſtehen kann.

*Wenn aber von dem Ueberſchuſs in der Caſſe der Theil abgehen kann, der zur Sicherung für Verluſt aufs künftige hinreichet, und denn noch mehr übrig bleibet, als im Anfang die Erwartung des endlichen reinen Gewinns war, ſo iſt die Tabelle* ſo, daſs ſie ſchon einen Gewinn für einen Theil aller Fälle gegeben hat, der gröſser iſt, als der zu erwarten war aus allen zuſammen. Sie iſt alſo in ſo weit *abweichend* befunden worden. Man kann ſie zwar abweichend und für die gegenwärtige Geſellſchaft fehlerhaft nennen, ſo bald ſie nicht ganz genau zutrifft. Aber ſo ein Zutreffen, zumal für einzelne Termine iſt gar nicht zu erwarten, iſt vielmehr erſtaunlich unwahrſcheinlich.

*Wenn der Erfolg ſo weit zuſammentrifft mit der Tabelle, daſs der reine Gewinn oder Verluſt am Ende nicht gröſser iſt, als jeder für ſich von Anfang an erwartet werden konnte, ſo kann man die Tabelle als mit dem Erfolg übereinſtimmend anſehen:* Allein wenn der Erfolg weiter von ihr abgeht, ſo kann man ſie als *abweichend* oder *fehlerhaft* annehmen.



Digitized by Google

II.

Ferner. *So lange der Ueberſchuſs nicht gröſser iſt, als das Riſico für die Zukunft, ſo lange kann ſolcher nicht für ſicher entbehrlich angeſehen werden.* Denn die Tabellen ſind zwar auch für die Zukunft richtig. Es lieſse ſich noch nichts befürchten, wenn man allen Ueberfluſs der Caſſe weggäbe. Die Erwartung des Gewinns iſt noch für die Folge ſo groſs als die Erwartung des Verluſtes. Der Unterſchied, daſs im Anfang die Sterblichkeit in der ausgeſuchten Geſellſchaft noch mehr geringer geweſen iſt, in Vergleich mit der gemeinen Sterblichkeit nach den Tabellen, als ſie es iſt in einem der folgenden Termine, kann freylich befürchten laſſen, daſs künftig der Ueberſchuſs nicht ſo groſs ſeyn werde. Allein dieſe Verſchiedenheit kommt hier nicht in Betracht, und würde ohnedieſs noch kein Grund ſeyn, künftig Defecte zu befürchten. Es iſt klar, daſs doch nicht der *ganze* Ueberſchuſs ſicher als entbehrlich angenommen werden könne. Die Tabellen für die Zukunft ſind ſicher, das heiſst weiter nichts, als dieſs: man wird mit ihnen ausreichen, nur muſs man dabey erwarten, daſs doch ſo viel als das Riſico beträgt, ſo gut verloren als gewonnen werden könne. Die Caſſe bekommt durch den ſchon gewonnenen Ueberſchuſs mehr Sicherheit gegen Verluſt, als ſie Anfangs hatte, und alſo iſt ihr Riſico zu verlieren, geringer als es von Anfang war. Allein ſie iſt noch nicht ganz ſicher, ſo lange der Ueberſchuſs noch kleiner iſt als dieſs Riſico für die Zukunft.



Digitized by Google

## 12.

2) Der *zweyte Grundſatz* iſt dieſer: *Iſt der gefundene Defect noch nicht ſo groſs als das Riſico der Caſſe, ſo iſt es noch nicht nothwendig, ihn zu erſetzen. Allein ſobald es über dieſs letztere hinausgeht, muſs ſo viel als jener gröſser iſt, nothwendig erſetzet werden.*

Die Gründe ſind die nämlichen, wie vorher. So lange der Defect unter dem Riſico iſt, kann in Zukunft ſo viel wieder gewonnen werden. Geht jener weiter, ſo iſt das übrige Verluſt, deſſen Erſatz nicht zu *erwarten* iſt, nach den Tabellen.

Daſs die Tabellen bey einem ſolchen Erfolg ſchon als *abweichend* anzuſehen ſind, läſst ſich noch darum nicht behaupten. Dieſs läſst ſich dann erſt ſagen, wenn *auſser dem Riſico für das künftige noch ein Defect übrig bleibt, der das anfängliche Riſico übertrifft.* Wie oben im 10ten §.

## 13.

Um alſo für jeden Termin, in welchem die Rechnung gemacht iſt, den *entbehrlichen Ueberſchuſs*, oder den *zu erſetzenden Defect zu finden*, iſt nichts nöthig, als *das derzeitige Riſico der Caſſe zu berechnen.* Dafür kann man das *gröſste* nehmen, muſs es auch die meiſten male wohl, wegen der Schwierigkeit und Weitläuftigkeit, die mit der genauen Berechnung deſſelben verbunden iſt.

Die

Die Zahl der Intereſſenten in dem beſtimmten Termin, das iſt hier, die *Zahl der ſtehenden Ehen und der Wittwen zuſammen* ſey N, und *a* die *Summe des an ſich möglichen gröſsten Gewinns und Verluſtes, bey einem einzelnen Intereſſenten.* Iſt dieſer wegen der Verſchiedenheit des Alters der Intereſſenten nicht bey allen derſelbe, ſo nehme man die mittlere Gröſse aus allen. Dann iſt das gröſste Riſico der Caſſe leicht zu berechnen. Es iſt $o, 2. a. N^{\frac{1}{2}}$. (§. 34. der *Abhandl. vom Riſico der Caſſe*). Und wo der gröſste *Verluſt* merklich von dem gröſsten *Gewinn* verſchieden iſt, $= o, 2. a. N^{\frac{1}{2}}. (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, wenn die Differenz des *an ſich möglichen gröſsten Gewinns* und *Verluſtes* bey *einer einzelnen Rente* durch *a* dividirt $= x$ geſetzet wird. (§. 35. *angeführt. Abhandl.*)

Wenn die Geſellſchaft *ausſtirbt*, ſo wird das Riſico kleiner in jedem Termin, weil ſo wohl die Zahl N, als der Werth von *a* abnimmt. Werden *neue Mitglieder* aufgenommen, ſo verſteht ſichs, daſs man diejenigen, welche in dem Rechnungstermin hinzu gekommen ſind, noch nicht mitrechnen müſſe. Auch dieſs braucht nicht erinnert zu werden, daſs hier die Gleichheit der verſicherten Penſionen bey den Intereſſenten vorausgeſetzet wird. Wenn das nicht iſt, ſo wird jeder einzelne gerechnet nach der Gröſse der Penſion. Iſt dieſe doppelt ſo groſs bey einem als bey einem andern, ſo iſt jenes ſo viel als zwey Intereſſenten, wenn die Penſion der letztern zur Einheit angenommen wird.

Das

Das gröſste Riſico auf die einzelnen Intereſſenten vertheilet, giebt für jeden $\frac{0.2.a}{N^{\frac{1}{2}}}$, die Correction bey Seite geſetzet, die aus der Differenz des gröſsten möglichen Gewinns und Verluſtes bey der einzelnen Rente erwächſt, und die der gröſsern Sicherheit wegen lieber ganz weggelaſſen wird, wo vom Ueberſchuſs die Rede iſt. Kommt ein Defect vor, ſo iſt mehr dahin zu ſehen, daſs das Riſico nicht zu hoch gerechnet werde. Das auf jedes einzelne Mitglied fallende Riſico mag bey der ausſterbenden Geſellſchaft gröſser werden, wenn die Intereſſentenzahl abnimmt; allein das geſammte Riſico der Caſſe wird immer kleiner.

## 14.

Die Geſellſchaft mag ausſterben, oder jedesmal wieder ergänzet werden, ſo wird ſie auf dieſe Art immer ſo gehalten, daſs ſie weder unnöthigen Ueberfluſs hat, den die Intereſſenten ja lieber ſelbſt in Händen haben, noch auch zu ſchwach wird ihren Verpflichtungen nachzukommen. Dieſs iſt klar, wenn ſie fortgeſetzet und gleichförmig ergänzet wird, und endlich zum Beharrungsſtande kommt. So lange noch die Zahl der Intereſſenten ſich vergröſsert, wird zwar in einem Fall der nicht entbehrliche Ueberſchuſs, der zurückbleiben muſs, und in dem andern Fall der Defect, der nicht erſetzet werden darf, gröſser, allein dann wird auch das, was

auf

auf die Einzelnen davon fällt, kleiner, und alſo unbedeutender.

*Stirbt die Geſellſchaft aus, ſo wird das Rifico für die Einzelnen etwas gröſſer, wenn die Zahl der Perſonen abnimmt.* Bleibt zuletzt nur Eine Perſon noch am Leben, ſo iſt im Fall des Ueberſchuſſes, auſser ihrer Leibrente nach den Tabellen, noch mehr in der Caſſe vorhanden. Es iſt alsdenn *a* oder die Summe des an ſich möglichen gröſsten Verluſtes und Gewinnes, ſo viel als die Zeitrente auf die Altersergänzung $= \int \frac{1}{r^{\alpha}}$, wenn eine Wittwe übrig, und $\alpha$ ihre Altersergänzung iſt. (§. 26. *vom Rifico*). Das gröſste Riſico alſo, was auſser der Leibrente für ſie da iſt, wird ſeyn $0,2. \int \frac{1}{r^{\alpha}}$. Dieſs iſt der Gewinn dieſer längſtlebenden Perſon für die letzte Zeit, der ihr allein zukommt, ſie mag vorher am Gewinn Antheil genommen, oder auch Schaden gelitten haben. Es iſt aber auch etwas nicht ſehr beträchtliches.

Wenn auch im entgegengeſetzten Fall ſo viel weniger vorhanden iſt, ſo iſt das ebenfalls kein erheblicher Verluſt; und wenn die längſtlebende Wittwe vorher ſchon gewonnen hat, ſo kann ſie ihn deſto füglicher tragen. Dieſs iſt eine Folge von dem unvermeidlichen Hazard, der bey einer ſolchen Caſſe übrig bleibt. Es iſt aber auch leicht, Einrichtungen zu treffen, wodurch man dieſen Unbequemlichkeiten bey der letzt übrigbleibenden zuvorkommt.

15. So

Digitized by Google

## 15.

So lange als die Tabellen nicht abweichend befunden werden, in dem Sinn, wie es oben in §. 10. und §. 12. beſtimmt iſt, hat es alſo damit nichts auf ſich. Allein wenn dieſs letztere ſich zeiget, ſo kann, zumahl wenn ſie unzureichend ſind, für die letzt lebende Perſon der Nachtheil zu wichtig werden. *Es iſt nöthig, daſs für dieſen Fall der Abweichung etwas zum voraus in dem Grundplan der Geſellſchaft feſtgeſetzet werde.* Man kann in den erſten Zeiten die Abrechnungstermine etwas kürzer ſetzen, und alle Jahre oder alle halbe Jahre die Bilanz ziehen, um zu ſehen, wie beträchtlich die Abweichung des Erfolgs ſeyn werde. Findet man ſie unwichtig in Verhältniſs mit dem Riſico, wie es ſeyn wird, wenn nach zutreffenden Mortalitätstabellen gerechnet iſt, ſo braucht man ſo oft nicht nachzurechnen.

Geſetzt aber, es ſey ein Ueberſchuſs oder ein Defect da von einer ſolchen Gröſse, daſs nach §. 10. die Tabellen für abweichend erkläret werden müſſen, ſo iſt entweder eine Veränderung für die Zukunft mit ihnen zu machen, und dann auch die Aufrechnung auf die Zukunft nach den veränderten Tabellen anzuſtellen, oder man muſs bey dem Grundſatze bleiben, die Tabellen ſollen wie ſie ſind, durchgeſetzet werden. Wird das letztere beliebet, ſo verſteht es ſich auch, daſs die Längſtlebende ihr Schickſal nehmen muſs, wie es fällt. Im

Fall

Fall des Defects ist für sie blofs die Leibrente da, weniger dem Risico, und jene kann selbst schon zu geringe seyn. Aber es ist dem anfänglich eingegangenen Contract gemäfs. Beliebet man dagegen eine Abänderung der Tabellen, so gehts bey den folgenden Untersuchungen der Casse nach den neuen Tabellen, wie vorher nach den alten.

## 16.

Die Tabellen sind nämlich *abweichend*, oder was hier gleichviel ist, fehlerhaft, wenn der Ueberschufs oder Defect, den man in einem Abrechnungstermin findet, so grofs ist, dafs nach Abzug des Risico für die Zukunft, noch mehr übrig bleibet, als das Risico im Anfang der Gesellschaft war. (§. 10. 12.) Sind nun aber *vorher schon solche Abrechnungen gemacht*, und ein entbehrlicher Ueberschufs aus der Casse weggenommen und vertheilet, oder sind Defecte, die nach dem obigen zu ersetzen waren, wirklich ersetzet, *so müssen diese* vorher vertheilten Ueberschüsse oder ersetzten Defecte, *hiebey mit in Anschlag gebracht werden.* Ist abwechselnd das eine und das andere geschehen, so wird dies zusammen genommen. Man kann die Abrechnungstermine kürzer oder länger machen, und in jedem die Casse wirklich in den Zustand bringen, den sie haben mufs. Das entbehrliche kann genommen, und das unentbehrliche, was fehlet, zugeschossen werden. Allein wenn die Frage ist, sind

ſind nach dem bisherigen Erfolg die Tabellen als abweichend anzuſehen, ſo muſs mans ſo nehmen, als wenn in dieſem Termin noch alles vorher vertheilte in der Caſſe vorhanden ſey, und als wenn noch kein Defect vorher erſetzet worden, mit einem Wort, als wenn nun zum erſtenmal abgerechnet würde. Dieſs verſteht ſich leicht von ſelbſt, aber in einer Materie, die noch nicht durchgedacht iſt, wird manche Erinnerung nöthig, über das was ſich von ſelbſt verſtehet, oder was doch der gemeine Menſchenſinn einem jeden beym Geſchäfte ſelbſt eingeben kann.

## 17.

Nun noch die dritte groſse Frage bey der Aufgabe: *wie der Ueberſchuſs oder der Defect unter den Intereſſenten zu vertheilen ſey?* Sie beantwortet ſich beynahe von ſelbſt.

1) *Es nimmt niemand an dem gewonnenen Ueberſchuſs oder an dem entſtandenen Defect Theil, als die in der Zeit, da jene entſtanden, Intereſſenten geweſen ſind.* Dahin gehören auſser den Frauen, deren Ehemänner noch leben, oder welches gleich viel iſt, auſser den Ehemännern, deren Frauen noch leben, die vorhandenen Wittwen der ſchon verſtorbenen Ehemänner, wenn nicht anders dieſe letztern durch eine beſondere Bedingung ausgeſchloſſen ſind. Eigentlich iſt es die *Frau*, welche intereſſirt iſt, obgleich der Mann für ſie bezahlt hat, oder

für sie fortwährend beyträgt. Sie ist es Anfangs als eine *eventuelle Pensioništin*, nachher, als eine *wirkliche*. Sie hat im ersten Fall alles geleistet, was sie nach dem Contract zu leisten hatte, und es kann gar nicht in Betracht kommen, wie lange oder kurz sie das eine oder das andere gewesen sey? Ist zu viel gegeben, so bekömmt sie das zurück, und ist zu wenig gegeben, so zahlt sie es nach, oder es wird ihr von ihrer Foderung abgezogen. Der Werth, den sie für ihre eventuelle und nun wirklich fällige Rente bezahlet hat, ist das Capital, was die Wittwe in der Casse stehen hat. Was die Casse gewinnet oder verliert, wird also auch auf ihr Geld pro rata gewonnen. So ist es auch im Fall des Verlustes. Es mögen wenige oder gar keine Beyträge für sie bezahlt seyn, nach den Tabellen. Gleichviel. Wozu sie sich anheischig machte, hatte der Zeit eben den Werth, als der baare Einsatz auf einmal gehabt haben würde.

## 18.

2) *Diejenigen von den Interessenten, die abgegangen sind, haben weder an dem Vortheil noch an dem Nachtheil der Casse, der nach ihrem Abgang erwachsen ist, Theil nehmen können.* Sie haben die Zufälle zu tragen sich verpflichtet, so lange sie Mitglieder sind. Aber es ist wider die Natur solcher Einrichtungen, vorauszusetzen, dass sie noch in Hinsicht dessen, was nachher sich zuträgt, etwas sollten nachzuzahlen, oder davon zu

erwarten

erwarten haben. Die Summe, die jemand im Anfang als Einſatz oder Beytrag erleget hat, fällt der ganzen Geſellſchaft anheim, welche übrig bleibet, auch wenn jener ſogleich durch den Tod der Frauen von der Geſellſchaft abtritt.

## 19.

3) Was *das Verhältniſs* betrifft, *wornach der Gewinn oder Verluſt unter die einzelnen Genoſſen der Geſellſchaft zu vertheilen ſey*, ſo iſt dieſs offenbar *aus den Einſätzen zu beſtimmen.* Es ſind nicht die *Penſionen*, das iſt die jährlichen Hebungen der Renten, worauf gewonnen oder verloren wird. Es ſind ihre baaren Werthe, oder die baaren Einſätze. Die letztern ſind nur dann in demſelben Verhältniſſe mit den Penſionen, wenn das Alter der Eheleute bey allen Paaren einerley iſt. Das war ein anders oben in dem 14ten §., als von dem gröſsten Riſico der Caſſe die Rede war. Dieſs Riſico hängt ab von der Gröſse der jährlichen Hebung, wenn vorher der möglich gröſste Verluſt auf eine einzelne Perſon nach einem mittlern Durchſchnitt genommen iſt. Dagegen hier, wo von dem Ueberſchuſs oder dem Defect die Rede iſt, zeiget ſelbſt die Art, wie ſolche aus den Activis und Paſſivis gefunden werden, daſs in jedem Fall auf *die baaren Werthe der Renten*, oder auf die *Einſätze* geſehen werde. Auf die Gröſse der jährlichen Hebungen nur dann, wenn ſonſt das übrige gleich iſt. Was aber



Digitized by Google

die *Beyträge* betrifft, so ist ihr Werth jedesmal auf den Werth eines baaren Einsatzes zurück zu bringen.

Es ist zugleich klar, dass auch die *Wittwen* als Interessenten betrachtet, nicht anders als nach dem Verhältnifs der anfänglichen baaren Werthe der Wittwenpensionen, oder des baaren Einsatzes, bey der Vertheilung anzusetzen sind. Die Wittwen *als Empfänger* betrachtet, haben mit der Abweichung der Casse nichts zu thun. Denn ist diese wieder rectificirt, so kann jede völlig empfangen, was sie haben soll. Aber an der Rectificirung selbst nehmen sie Antheil, es sey denn, wie oben schon erinnert, dass ausdrücklich in Hinsicht ihrer ein anderes festgesetzet sey.

## 20.

Aus dem zweyten Grundsatz in §. 18. folget von selbst, dass *nur denen von den Interessenten das berechnete zu gut komme, oder zur Last falle, die der Zeit bey der Gesellschaft gewesen sind, als der Gewinn oder Verlust entstanden ist.* Darnach hat man also den abgegangenen sowohl als den neu hinzugetretenen, wenn die Gesellschaft fortgesetzet wird, das ihrige zu berechnen. Freylich können auf diese Art einige eine glücklichere, andere eine unglücklichere Periode treffen; allein das ist kein Einwurf gegen den Grundsatz. Diesem unvermeidlichen Zufall mufs sich jedweder unterwerfen. Liegt gleich die Schuld an den Tabellen, die man vielleicht

in

Digitized by Google

in der Folge ändern muſs, ſo macht doch dieſs keine Aenderung in der Art der Berechnung. Wer eintrat, trat ein unter der Bedingung, es auf die zum Grunde gelegten Tabellen wagen zu wollen. Er gewinnt, was nach dieſen gewonnen wird, oder vielmehr erhält zurück, was zu viel bezahlt wird, muſs aber auch nachſchieſsen, was er zu wenig gegeben hat.

Wenn bey einer Geſellſchaft, wo in jedem Termin neue Intereſſenten hinzukommen, *genau* gerechnet werden ſollte, ſo müſste die Abrechnung auch *in jedwedem Termin* gemacht werden, um mit den abgetretenen Intereſſenten abzuſchlieſsen. Nachher iſt weder der Ueberſchuſs bequem zu vertheilen, noch der nöthige Nachſchuſs mehr beyzubringen. Iſt aber die ganze Abweichung des Erfolgs von den Tabellen, er falle zum Vortheil oder zum Schaden, von keiner groſsen Erheblichkeit, ſo kann es genug ſeyn, *alle zwey bis drey Jahre* den Caſſenzuſtand zu berechnen. „Die in den Zwi„ſchenzeiten abgegangene Intereſſenten können füglich „als ſolche angeſehen werden, mit denen nach der „nächſt vorhergegangenen Abrechnung nichts weiter „abzumachen iſt.“ Dieſs kann auch, zumahl bey einer *fortdauernden* Geſellſchaft, nicht viel Unterſchied für die Nachbleibenden ausmachen. *Stirbt die Geſellſchaft aus*, ſo iſt ſchon mehr Rückſicht darauf zu nehmen, daſs man die Abrechnungstermine etwas kürzer ſetze, wenn



Digitized by Google

die Zahl der Intereſſenten kleiner geworden iſt. Dieſs findet ſich aber von ſelbſt.

## 21.

Dieſs iſt die allgemeine Auflöſung des Problems, angenommen nämlich, die Geſellſchaft habe ſich ſelbſt garantirt; ihr entbehrlicher Ueberſchuſs könne alſo unter die Intereſſenten vertheilet werden, dagegen der Defect, der ſich nicht ſelbſt hebet, von ihnen erſetzet werden müſſe. Iſt ein Ueberſchuſs vorhanden, ſo wird man die meiſten mahle leicht zurecht kommen. Allein wenn ſich Defecte finden, ſo entſtehen mehrere Schwierigkeiten, die unauflöſsbar ſeyn können, woferne man nicht zum voraus in dem Grundplan hierauf gedacht, und die alsdenn zu nehmenden Maſsregeln beſtimmt hat. Dieſs macht noch einige Bemerkungen nothwendig.

Hat man Einſatztabellen zum Grunde gelegt, die nach ſichern Mortalitätstafeln, auf die Art, wie es ſeyn muſs, berechnet ſind, ſo iſt eine ſolche Abweichung des Erfolgs, daſs man die Tabellen für fehlerhaft erklären müſſe (§. 12.), nicht zu befürchten. Oder wenn das ja einmahl ſich eräugnen ſollte, ſo wird eine leichte Correction alles heben können. *Iſt die Caſſe garantirt*, ſo darf gar nichts darüber verabredet ſeyn. Der Garant muſs in dieſem Fall büſsen. Aber wo kein Garant iſt, und wo man nur einigen vernünftigen Grund hat, gegen die Einſatztabellen miſstrauiſch zu ſeyn, da iſt es nicht

nur

Digitized by Google

nur nützlich, ſondern nothwendig, wohl vorher zu überdenken, was in einem ſolchen Fall geſchehen ſolle. Dieſs iſt auch bey den beſten Tabellen ſo, wenn die Geſellſchaft aus einer zu kleinen Zahl von Intereſſenten beſteht. Denn die Abweichung von der mittlern in den Tabellen angenommenen Gröſse kann alsdenn bey einzelnen Perſonen ſtärker ausfallen.

Ueberhaupt glaube ich, müſſe es bey jedweder Art von Verſorgungsanſtalt, die nicht garantirt wird, zur Regel gemacht werden, daſs in dem Plan des Inſtituts über den erwähnten Punct, was nämlich geſchehen ſolle, wenn die Tabellen nicht ausreichen, alles gehörige beſtimmt ſey. Iſt das bey ganz ſichern Tabellen eine überflüſsige Sorgfalt, ſo iſt ſie doch auch unſchädlich. Nachher, wenn der Fehler offenbar wird, iſt das Intereſſe der Theilnehmer zu verſchieden, als daſs eine Vereinbarung unter ihnen zu hoffen ſey. Was der Natur der Sache nach das billigſte iſt, iſt dann auch gerecht. Aber über jenes ſind die Urtheile eben ſo verſchieden, als über dieſes. Die Wittwen werden, wenn die Tabellen nicht ausreichen, wünſchen, daſs man zur Erſetzung des zu wenig bezahlten ſich entſchlieſse. Sollen ſie gleich ſelbſt als Intereſſenten dabey angeſehen werden, alſo auch zu der Erſetzung zu ihrem Theil beytragen, ſo gewinnen ſie doch, wenn ihnen für künftig die volle Penſion geſichert wird, zumahl wenn ihre Ehemänner auf Beytragsfuſs vorher geſtanden haben. Denn in dieſem Fall macht

dasjenige, was sie nachzugeben haben würden, einzelne Fälle ausgenommen, so viel nicht aus. Die Ehemänner hingegen, deren Frauen noch leben, werden lieber sehen, dass die Gesellschaft ganz aufhöre, oder werden auszutreten suchen, zumahl wenn sie noch in andern bessern Instituten aufgenommen werden können. Diese letztern sollen für das Vergangene nachschiessen, und in Hinsicht des künftigen haben sie noch so viel zu zahlen, als nothwendig ist, das ist, so viel als wofür ihnen in andern nach zutreffenden Tabellen berechneten Instituten dieselbe Anwartschaft gegeben wird. Dies muss sie natürlicherweise geneigt machen, ihre alte Verbindung aufzuheben.

Die Art, wie die Defecte zu berechnen sind, kommt, wie sichs versteht, nicht eher zur Anwendung, als wenn schon ausgemacht ist, dass sie ersetzet werden sollen. Ist ein anders verabredet, so bedarf es jener Aufrechnung nicht. Dass die Gesellschaft ausdrücklich sich selbst garantirt habe auf die angenommenen Tabellen, dass sie also sich verpflichtet habe, diese durchzusetzen, und alles, was die Casse dabey zu kurz kommt, pro rata über sich zu nehmen, dass dies ausdrücklich oder stillschweigend verabredet sey, ist die Bedingung, die hier voraus gesetzt wird. Sonst kommt nichts auf die Frage an, *wie* die Rechnung zu machen sey?



Digitized by Google

22.

Man kann aber andere Maſsregeln auf dieſen Fall, wenn nämlich die Tabellen mangelhaft ſind, beſtimmt haben. Es iſt manches hiebey willkührlich, oder ſo, daſs man nicht ſagen könne, es ſey mehr durch die Natur der Sache und des Zwecks nothwendig als ein anderes. So lange die Defecte nicht ſo groſs ſind, daſs man die Tabellen für unzulänglich erklären muſs, wird ein Intereſſent auch nicht leicht Gründe haben, ſich von der Geſellſchaft zu trennen. Er kann durch eine Vertauſchung derſelben mit einer andern nichts, oder nicht viel gewinnen. Denn wo er ſich auch einläſst, ſo muſs er doch entweder ſelbſt das Riſico für die Zukunft mit übernehmen, oder dafür etwas aufopfern. In ſeiner Geſellſchaft hat er zwar ſo viel ſchon verloren, als dieſs austrägt, aber er kann es noch wieder gewinnen in der Folge. Der andere Theil des Defects, der in dieſem Fall, (nach §. 12.) gröſser iſt, als das anfängliche Riſico, will, auf einzelne vertheilet, ſo viel nicht ſagen (man ſehe Beyſpiele im §. 37. der *Abh. vom Riſico*), daſs ein Intereſſent darum die Geſellſchaft zu verlaſſen habe. Meiner Meinung nach iſt es ein Grundſatz, „daſs wenn „nichts über die Garantie feſtgeſetzet iſt, und die Ge„ſellſchaft bloſs auf ſich ſelbſt beruhet, ſo müſſen die „einmal angenommenen Tabellen, ſo lange ſie nicht in „dem beſtimmten Grade mangelhaft ſind, beybehalten, „das Inſtitut nach denſelben fortgeſetzet, und alſo die



Digitized by Google

„Defecte von den Intereſſenten, ſo weit ſie der Erwar-
„tung nach ſich nicht ſelbſt heben können, wieder er-
„ſetzet werden, ohne daſs es einem Mitgliede erlaubt
„ſey, eigenmächtig der Fortſetzung, und dem Nach-
„ſchuſs zur Ergänzung ſich zu entziehen.“ Will man ſich willkührlich zu etwas anders vereinbaren, die Tabellen etwan für die Zukunft abändern, oder die Penſionen vermindern, oder gar aus einander gehen, ſo ſteht das frey, wenn alle einſtimmen. Allein ich meine, dieſs erfordere alsdenn auch Unanimität in den Beſchlüſſen, und nicht bloſs eine *Mehrheit*, weil keine Mehrheit auf einer Seite einen noch beſtehenden Contract aufheben kann.

## 23.

Sind aber die Tabellen mangelhaft (§. 12.) ſo entſteht die Frage: was geſchehen könne oder müſſe? Man darf noch eben nicht in dem nämlichen Termin, wenn ſichs ſo findet, die ganze Sache aufgeben; man kann den nächſtfolgenden abwarten, ob nicht vielleicht der Defect wiederum in die Grenzen zurückkomme, wie er mit den Tabellen beſtehen kann. Zu erwarten iſt dieſs aber nicht. Daher auch nicht lange ein ſolcher Verſuch fortgeſetzet werden darf.

Wird die Mangelhaftigkeit der Tabellen offenbar, ſo kann das Inſtitut nach ſeiner Grundanlage nicht mehr beſtehen; kann es aber dennoch nicht erhalten, nicht ausge-

Digitized by Google

ausgebeſſert, nicht umgeändert werden, oder iſt es gleich ganz aufzugeben, und die Auseinanderſetzung der Intereſſenten zu beſchaffen? Hier iſt es ganz etwas anders; was geſchehen *ſolle*, wenn nichts darüber zum voraus beſtimmt iſt? Was rechtlich iſt, oder was geſchehen *müſſe*, und ein anders, was geſchehen *könne?* Auf jenes laſſe ich mich nicht ein, nur von dem, was geſchehen *kann*, und was man zum voraus in dem Plan für dieſen Fall hätte feſtſetzen *können*, will ich noch etwas anfügen. Es gehört zwar nicht zu der Aufgabe, die hier zu unterſuchen iſt. Allein ich hoffe, man werde dieſe Anmerkungen leicht mitnehmen. Auch enthält das, was geſchehen kann, und zum voraus hätte verabredet werden können, ſo viel ich ſehe, den Grund, woraus am Ende beurtheilet werden muſs, was im vorkommenden Fall das angemeſſene und billige, und dann auch das gerechte iſt, wenn keine poſitive Geſetze vorhanden ſind. Indeſſen ſcheint mir folgendes ſo klar als ein Grundſatz zu ſeyn. „Wenn die Tabellen mangelhaft ſind, alſo das Inſtitut „nach ſeiner Grundverfaſſung unbeſtehbar, ſo ſey der „geſellſchaftliche Contract, der nur unter der Bedingung „eingegangen iſt, daſs man mit den gewählten Tabellen „ausreiche, für ſich als ungültig aufzuheben, und die „Geſellſchaft auseinander zu ſetzen.“ Geſchieht das nun nicht, ſo müſſe es jedoch jedem einzelnen Intereſſenten, der nicht bleiben will, frey ſtehen, auszutreten, und ſich zurückgeben zu laſſen, was ihm aus dem Caſſenbeſtand

ſtand nach einer richtigen Auseinanderſetzung zu gute kommt. Es muſs jedem Einzelnen frey ſtehen, ſich zu trennen oder nicht zu trennen, er thue wohl daran oder nicht. Wie alsdenn aber mit ihm abzurechnen ſey, und was er zurückfodern könne, davon nachher. Genug daſs in Rückſicht ſeiner es ſo anzuſehen, als wenn die Geſellſchaft aufhöre, wenn gleich der übrige Theil nach einem verbeſſerten oder veränderten Plan ihre Verbindung fortſetzen will.

## 24.

Es läſst ſich *erſtlich* auf dieſen Fall feſtſetzen, *daſs die einmal zum Grunde gelegten Tabellen* als ſchlechthin von der Geſellſchaft ſelbſt garantirt angeſehen, und alſo *auf beſtändig behalten* werden, alſo auch jeder Caſſen-Mangel von den Intereſſenten verhältniſsmäſsig erſetzet werden ſolle. Auf dieſe Art läſst ſich ein Inſtitut fortſetzen, wie ſchlecht es auch Anfangs berechnet iſt. Allein man ſehe ſich für, daſs dieſs nicht eine unvernünftige Verpflichtung werde, die zuletzt unmöglich zu erfüllen iſt. Soll ſie das nicht werden, ſo iſt folgendes nothwendig.

1) Es müſſen die Tabellen, wornach die Praeſtanda berechnet ſind, doch von der Art ſeyn, daſs aus ihnen das Deficit der Caſſe berechnet werden kann; oder auch man muſs zum voraus gewiſſe Tabellen annehmen, die in dem Fall gelten ſollen. Wie kann ſonſt nur eine Aufrech-

Digitized by Google

Aufrechnung angeſtellet und der Defect gefunden werden? Bey dem alten Calenbergiſchen Inſtitut war hieran gar nicht gedacht. Denn nach den Einſatztabellen liefs ſich weder das künftige Bedürfniſs noch die künftige Foderung der Caſſe ausmachen. Da war keine Tabelle für Leibrenten noch für Ehrenten.

Sind Tabellen, die eine ſolche Rechnung möglich machen, zum Grunde gelegt, ſo iſt, wenn dieſe fehlerhaft befunden ſind, die Frage: ob die Berechnung der zu erſetzenden Defecte, nach dieſen fehlerhaften, oder nach andern angeſtellet werden ſolle? Das letzte iſt nicht ganz nothwendig. Man kann bey den erſtern, die man garantirt hat, bleiben; und wenn dieſe nicht gar zu ſehr fehlerhaft ſind, auch die Erſetzung der entſtandenen Mängel nur immer zeitig genug geſchieht, bevor der Schaden zu groſs iſt, ſo läſst ſich in der anfänglichen Bahn fortgehen. Geſetzt daſs auch in jedem Termin von neuen Defecte da ſind, ſo bleiben ſie doch in gewiſſen Schranken. Man muſs nur nachſchieſsen, was man voraus hätte geben ſollen. Allein weil das Nachſchieſsen immer ſchwerer werden kann, auch wenn die Geſellſchaft ſich beſtändig ergänzet, ſo iſt es weit vernünftiger, die Berechnung des Caſſen-Zuſtandes nach andern Tabellen anzuſtellen, ſo bald ſich zeiget, daſs die zum Grunde gelegten nicht ausreichen. Iſt das zum voraus beſtimmt, ſo kann man ſich, in Hinſicht der Einſätze und Beyträge, nach den erſten Tabellen noch ferner

richten.

Digitized by Google

richten. Die Caſſe wird jedesmal nach den richtigen Tabellen wieder in Ordnung gebracht. Aber es iſt beſſer, alsdenn auch die erſtern ganz fahren zu laſſen.

2) Iſt es ſehr nöthig, wenn man den Tabellen nicht trauen kann, bald nach dem Anfang, und oft, gar alle halbe Jahre, die Aufrechnung der Caſſe zu machen. Die Defecte müſſen nicht zu ſtark anwachſen, ſonſt wird die Erſetzung zu ſchwer.

3) Die Caſſe muſs von jedem Intereſſenten etwas in Händen haben, zur Sicherheit, um ſich, wenn die Nachſchüſſe nothwendig ſind, bezahlt machen zu können.

## 25.

Beſſer iſt das zweyte Verfahren. Man beſtimme nämlich eine Correction des Inſtituts, wenn die Tabellen mangelhaft befunden ſind, nehme andere Tabellen, und mache nach dieſen letztern die Gröſse des vorhandenen Defects aus, der ergänzet werden muſs. Die Wittwen, welche ſchon fällige Penſionen genieſſen, können ihrer Lage gegen die Geſellſchaft gemäſs, ganz füglich eben ſo wie die Ehefrauen als Intereſſenten betrachtet und alſo auch zur Schadenserſetzung zugezogen werden. Dabey iſt es dann an ſich zwar gleichviel, ob das nachzuſchieſsende von den Intereſſenten in Gelde bezahlet, oder ob ſo viel am Werth von ihren künftigen Erwartungen, den Wittwen von ihren fälligen, den Ehefrauen von ihrer eventuellen Rente abgezogen werde?

Allein

Digitized by Google

Allein es iſt der Unterſchied da, daſs wenn man ſtatt des Geldes die Werthe der Penſionen nimmt, ſo entläſst man in ſo ferne die Intereſſenten ihrer Verbindung mit der Geſellſchaft, und hebet dieſe zum Theil auf, was doch nicht ſeyn ſoll. Daher müſste die Erſetzung des Defects lieber in Gelde geſchehen. Eben darum muſs man ihn auch nicht haben zu groſs werden laſſen.

Sollen die Penſionen heruntergeſetzet werden, um den Defect gut zu machen, ſo iſt dabey zu bemerken, daſs *dieſe Verminderung nicht in gleichem Verhältniſs bey den fälligen* und bey den *eventuellen* vorgenommen werden könne, wenn bey allen der Maaſsſtab, wornach die Erſetzung geſchiehet, derſelbe ſeyn ſoll. Eine *Wittwe* ſey von gleichem Alter *a* als eine noch *lebende Ehefrau*, und jener ihr verſtorbener Mann ſey beym Eintritt in die Geſellſchaft ſo alt geweſen als der noch lebende Mann der letztern, ſo iſt das, was beyde zum Erſatz des Caſſen-Mangels nachzuſchieſsen haben, einander gleich. Dieſs ſey Q. Die *fällige* Rente der erſten iſt $\lambda\overline{a}$; die *eventuelle* der letztern $\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}$. Jene hat alſo noch zu erwarten $\lambda\overline{a} - Q$; dieſe $\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab} - Q$. Macht nun Q einen gewiſſen Theil von $\lambda\overline{a}$ aus, er ſey $= \frac{\lambda\overline{a}}{n}$, ſo empfängt die Wittwe künftig nur $\left(\frac{n-1}{n}\right)\lambda\overline{a}$, wenn ſie den Nachſchuſs durch Kürzung an der Penſion bezahlen ſoll. Die eventuelle Rente der noch in der Ehe lebenden Frau iſt $\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}$; wird dieſe in gleichem Verhält-

Verhältniſs herabgeſetzt, ſo iſt die Erwartung $\frac{n-1}{n}$ $(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab})$. Dieſs iſt um $\frac{1}{n}\lambda\overline{ab}$ mehr als $\frac{n-1}{n} \cdot \lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}$, wie es ſeyn ſollte.

## 26.

Das *dritte Mittel*, wozu man greifen kann (von den allgemeinen und einfachen iſt hier nur die Rede, die zuſammengeſetztern, die etwan die Klugheit desjenigen, der den Plan entwirft, aus den beſondern Umſtänden ziehen mag, können und brauchen nicht angeführet zu werden), das dritte einfache Mittel iſt, daſs man auf den gedachten Fall der Unbeſtehbarkeit der Caſſe, *die Geſellſchaft aufhören laſſe*, die Caſſe für fallit erkläre, und alsdenn den Intereſſenten, in Verhältniſs nach ihren Foderungen die etwan vorhandenen Fonds der Caſſe zutheile. Wenn dieſs zum voraus bedungen iſt, ſo muſs jeder Intereſſent ſich darauf gefaſst machen, und es iſt kein Unrecht, wenn nachher ſo verfahren wird. Auch iſt ſo viel, wie vorher ſchon erinnert, wohl auſser Zweifel, daſs wenn nichts über dieſen Punct beſtimmet iſt, ſo müſſe doch der Contract, der ſeiner Natur nach unbeſtehbar und alſo null iſt, von ſelbſt aufhören, ſobald ſich zeiget, daſs er das iſt.

Allein *zwey Puncte* kommen alsdenn zur Frage, erſtlich, wie die *Foderungen* der auseinander zu ſetzenden Intereſſenten *zu berechnen?* und zweytens, *ob alle Intereſſen-*

*Intereſſenten bloſs nach dem Verhältniſs ihrer Foderungen zu ſchätzen ſind*, oder ob nicht hier, wie gewöhnlich bey Concurſen, einigen Gläubigern ein Vorzug vor andern beygelegt werden *könne* und nach der Natur der Sache auch *müſſe?*

Daſs *Wittwen* und *Ehefrauen* an dem bis dahin entſtandenen Defect der Caſſe zu *gleichen* Theilen gehen, wenn alles übrige gleich iſt, und alſo bis dahin auch gleich verlieren, ſcheint ſehr natürlich zu ſeyn. Der Unterſchied zwiſchen ihnen, daſs die Wittwen *empfangen*, die Ehefrauen *ausgeben*, oder doch nicht empfangen, kann darinn nichts ändern. Wenn das nun immer ſo fort gehen, alſo in jedem Termin neue Defecte entſtehen würden, ſo würden beyde immerfort auch davon leiden in demſelben Verhältniſs. Aber die Wittwen würden alsdenn auch immerfort etwas empfangen, und die Ehefrauen noch immer etwas auszahlen. Dieſs hört auf, wenn die Geſellſchaft zerriſſen wird. Daraus entſteht eine verſchiedene Lage beyder Theile. Die Wittwen verlieren von neuen; und ihr Schaden in Hinſicht des Künftigen iſt unerſetzlich. Sie würden noch immerfort gerne die Defecte zu ihrem Antheil erſetzen, wenn ihre Penſionen ihnen gelaſſen würden. Die *Ehefrauen* dagegen, die bisher zu wenig gegeben haben, können, zumahl wenn ſie auf Beyträge geſtanden, nicht nur dieſe leicht überwinden, ſondern ſie *können durch den Erfolg ſogar gewonnen haben.* Sie haben die vorigen

Jahre durch ihre Sicherheit für einen zu niedrigen Preis gehabt. Nach richtigen Tabellen hätten sie mehr zahlen müssen. Sie sind aber abgekommen mit wenigern. Ihre Ehemänner, einige etwan ausgenommen, haben Gelegenheit auf andere Art Pensionen für sie zu versichern, und *in jedem Fall wird das, was sie bis dahin gegeben haben, und was sie künftig noch geben müssen, weniger betragen, als was sie vom Anfang an hätten aufwenden müssen, wenn sie gleich damals nach richtigen Tabellen gezahlt hätten.* Der Unterschied kann gröser oder kleiner, und bey einigen unerheblich seyn; aber etwas ist doch immer da. Am ersten leuchtet dies ein, wenn sie auf *Beyträge* bey der Casse gestanden haben. Gesetzt ein Ehemann habe nur die Hälfte von dem jährlich contribuirt, was er nach dem wahren Werth der Wittwenrente hätte contribuiren müssen. Nun mag der Cassenbestand nichts, oder auch seine Foderung an selbigen so unerheblich seyn, dass sie für nichts zu rechnen ist. So kann er sich anderswo einlassen. Da muss er zwar mehr geben, als er hätte geben müssen, wenn er gleich im Anfang hier eingetreten wäre, weil der Beytrag jetzo für ihn gröser ist, als er vorher beym jüngern Alter beyder Eheleute gewesen seyn würde. Aber was er erspart hat die vorhergehenden Jahre durch, ist gröser, als was er künftig mehr zu geben hat.

Wenn *baare Einsätze* gezahlet sind, so wird folgender allgemeiner Ueberschlag dasselbe Resultat geben, nur

dass

Digitized by Google

dass hier der Unterschied kleiner seyn kann. Das Alter der Eheleute sey beym Eintritt bey allen Ehen gleich. Bey der Aufrechnung der Casse finde sich der ganze *Defect D*, nach seinem *dermaligen* Werth; die Zahl der vorhandenen *Wittwen* sey *m*, die Zahl der stehenden Ehen, oder der *Ehefrauen n*, und die Zahl der *gestorbenen Frauen* oder der abgegangenen Interessenten, *t*. Alsdenn ist das, was die *Wittwen* hätten gleich Anfangs mehr geben müssen, bey richtigen Tabellen nach seinem dermaligen Werth, $\frac{m}{m+n+t} \cdot D$. Was die *Ehefrauen* hätten mehr geben müssen, $\frac{n}{m+n+t} \cdot D$.

Hiemit vergleiche man, was jede Classe bey der Auseinandersetzung nach dem obigen Grundsatz empfangen soll. Was in Cassa seyn sollte, beträgt 1) so viel als die Foderungen der *Wittwen*. Diese sind *fällige* Renten, oder Leibrenten, man setze sie nach ihrem damaligen Werth, $m \lambda \overline{a}$. 2) Die Foderungen der *Ehefrauen*. Dieß sind eventuelle Wittwenrenten, die sich belaufen auf $n (\lambda \overline{a} - \lambda a \overline{b})$.

Der *vorhandene Cassenbestand* ist

$$m \lambda \overline{a} + n (\lambda \overline{a} - \lambda a \overline{b}) - D.$$

Wird nun dieser Cassenbestand nach Verhältniss der Foderungen vertheilet, so ist das, was den *Wittwen* zufällt, $m \lambda \overline{a} - \frac{m \lambda \overline{a}}{(m+n) \lambda \overline{a} - n \lambda a \overline{b}} \cdot D$,

das ist $\frac{m\lambda\overline{a}}{(m+n)\lambda\overline{a}-n\lambda\overline{ab}}\cdot D$ weniger, als ihre Foderungen sind. Da aber

$$\frac{m.\lambda\overline{a}.D.}{(m+n)\lambda\overline{a}-n\lambda\overline{ab}}=\frac{m}{m+n}\cdot D.\left(1+\frac{mn.\lambda\overline{ab}}{(m+n)\lambda\overline{a}-n\lambda\overline{ab}}\right)$$

das ist *gröfser* als $\frac{m}{m+n}D$ ist, so ist der Verlust der Wittwen an ihren Foderungen gröfser als $\frac{m}{m+n}\cdot D$, und also auch gröfser als $\frac{m}{m+n+t}\cdot D$, das ist, *gröfser als was sie hätten bezahlen müssen, wenn sie von Anfang an nach richtigen Tabellen bezahlet hätten.*

Was die in der *Ehe lebenden Frauen* erhalten, beträgt $n(\lambda\overline{a}-\lambda\overline{ab})-\frac{n(\lambda\overline{a}-\lambda\overline{ab}).D}{(m+n)\lambda\overline{a}-n\lambda\overline{ab}}$. Da ihre Foderung $n(\lambda\overline{a}-\lambda\overline{ab})$ ist, so verlieren sie daran das letztere Stück. Diefs Stück aber ist *kleiner* als $\frac{n(\lambda\overline{a}-\lambda\overline{ab}).D}{(m+n)\lambda\overline{a}-(m+n)\lambda\overline{ab}}$, weil dorten der *Nenner* gröfser ist, folglich auch kleiner als $\frac{n}{m+n}\cdot D$. Es ist nämlich

$$\frac{n(\lambda\overline{a}-\lambda\overline{ab})D}{(m+n)\lambda\overline{a}-n\lambda\overline{ab}}=\frac{n}{m+n}\cdot D-\frac{mn\lambda\overline{a}.D}{(m+n)\lambda\overline{a}-n\lambda\overline{ab}}$$

das ist hier so viel *unter* $\frac{n}{m+n}D$, als der Verlust bey den Wittwen *über* $\frac{m}{m-n}D$ war. Nun hätten diese Ehefrauen $\frac{n}{m+n+t}\cdot D$ mehr als geschehen ist zahlen sollen, und weil auch diefs *kleiner* ist als $\frac{n}{m+n}\cdot D$,

so

so könnte bey ihnen beydes vielleicht gegen einander aufgehen. Allein wenn man überlegt, dass entweder *t* eine kleine Zahl ist, in Vergleichung mit *m* und *n* in den ersten Jahren, im Fall nämlich die Abrechnung bald nach dem Anfang der Gesellschaft gemacht wird; oder dass, wenn die Gesellschaft schon viele Jahre bestanden hat, die Differenz auch gröfser werden kann, so wird man leicht übersehen, es werde überhaupt so herauskommen, dass die Ehefrauen der schlechtern Tabellen wegen Vortheile gehabt, die Wittwen aber Schaden gelitten, wenn der Cassenbestand blofs nach dem Verhältnifs der Forderungen vertheilet wird. Daher glaube ich, sey es nicht billig, dieses letztere als eine Regel in einem Plan festzusetzen. Sollte nicht den Wittwen etwas voraus gegeben werden, so viel wenigstens, *dass der Schaden auf beyden Seiten gleich werde*, der nämlich von der Fehlerhaftigkeit der Tabellen entspringt, wenn dieses anders noch angeht, sollte auch die ganze Casse ihnen überlassen werden müssen? Kann es also, wenn in dem gesellschaftlichen Contract nichts über die Art der Auseinandersetzung bestimmt ist, als ein Rechtsgrundsatz, der aus der Natur der Sache folge, angesehen werden, dass der Cassenbestand in Verhältnifs der Foderungen zu vertheilen sey? Meiner Meinung nach werden die Wittwen dabey zu hart behandelt. Man sieht sie gewöhnlich als die Gewinner beym Spiel an. Das sind sie, aber leider sind sies. Von dieser Seite kann die



Digitized by Google

Sache nicht in Betracht kommen. Nicht die *wirklichen Hebungen* werden bezahlet, sondern *die Sicherheit* auf den Fall, wenn sie nöthig sind, sie zu haben, die eventuellen Pensionen. Jeder empfängt und genieſset sogleich was er gekauft hat. Die Frage kann also nur seyn: was ist zu verfügen für den Fall, dafs man sich in dem wahren Werth dieser Sicherheit geirrt und zu wenig bezahlet hätte? Sollte denn nicht gleich viel zu wenig, für gleiche Pensionen, von *allen* gegeben seyn, wenn nämlich die übrigen Umstände gleich sind?

## 27.

In Hinsicht der *Foderungen der Interessenten* ist noch darauf zu denken, dafs man die Tabellen zum voraus bestimme, wornach sie bey der Auseinandersetzung zu berechnen sind. Man kann diejenigen nehmen, die man einmal angenommen hat, wornach die Erwartungen Anfangs berechnet sind, und worauf der Contract gemacht ist. Aber da diese fehlerhaft befunden werden, so ist es, wie vorher schon erinnert, vernünftiger, andere, wovon man weifs, dafs sie zutreffen, zum voraus auf diesen Fall anzunehmen.

*Wie* aber die Foderungen zu berechnen sind nach den Tabellen, ist bey baaren Einsätzen eben vorher schon gewiesen.

***Die** Foderungen der Wittwen bleiben dieselben*, wenn ihre Ehemänner auf *Beyträge* gestanden haben. Aber die

die der *Ehefrauen* werden verändert. Denn dieſe ſind der Caſſe noch eine Ehegente ſchuldig, ſo groſs, als ihr jährlicher Beytrag iſt. Dieſer Beytrag ſey *b*, ſo iſt die Foderung einer jeden an die Caſſe, die eventuelle Wittwenrente $\lambda\overline{a} - \lambda\overline{a\,b}$; hingegen ihre *Schuld* $b\,\lambda\overline{a\,b}$. Alſo ihre *reine Foderung*, $\lambda\overline{a} - (1+b)\,\lambda\overline{a\,b}$.

Sind wiederum *m* Wittwen da, und *n* Ehefrauen, ſo iſt die Summe aller Foderungen an den Caſſenbeſtand $(m+n)\,\lambda\overline{a} - n\,(1+b)\,\lambda\overline{a\,b}$; wenn nämlich das Alter bey allen Ehepaaren im Anfang gleich geweſen iſt.

## 28.

Bey der *vormaligen Calenbergiſchen Geſellſchaft*, um dieſs auch noch im Vorbeygehen zu berühren, hatte die Auseinanderſetzung der Intereſſenten viele Schwierigkeit. Es waren eigentlich *Beyträge* gegeben worden, auſser einigen Geldern beym Eintritt, die man *dupla* nannte, und nachzuzahlende Zinſen, die als verloren hingegeben worden, und die demnach als baare Einſätze anzuſehen waren. Hier entſtand bey der Auseinanderſetzung der Intereſſenten 1) die vorläufige Frage, nach welchen Tabellen die Wittwenrenten zu berechnen? Doch über dieſe Frage hätte man am Ende ſich leicht vergleichen können.

2) Als geleiſtete Beyträge waren erſtlich die *Zinſen* der zur Hypothek in die Caſſe beym Eintritt niedergelegten Jahrshebung der Penſionen anzuſehen. Dieſe



Digitized by Google

hatten immer die gleiche Gröſse. Was auſser dieſen aber noch halbjährlich beygebracht war, und was eigentlich Beytrag hieſs, war veränderlich. Dieſs war bloſs nach Verhältniſs der aufzubringenden Penſionen bezahlet, jedoch ſo, daſs die Intereſſenten ſich anheiſchig gemacht, bis auf eine beſtimmte Grenze, nämlich 8 Pfennige aufs Simplum, nach der im Plan angenommenen Sprache, es erhöhen zu laſſen. Es hatten daher die Intereſſenten in den erſten Jahren weniger an Beyträgen bezahlet, als in den letztern. Nach welchen von dieſen veränderlichen Beyträgen ſollten nun die Werthe der Renten, die ſie zu fodern hatten, gerechnet werden? Daſs einige weniger bezahlt hatten, war bloſs eine zufällige Folge der Umſtände. Wenn gleich in den erſten Terminen die Beyträge zu ihrer höchſten Gröſse geſtiegen wären, ſo hätten die Intereſſenten ſich nach dem Plan ſolches gefallen laſſen müſſen. Sie zahlten im Anfange zwar wenig, und hofften in langer Zeit nicht viel zu bezahlen. Aber da ſie doch auf den höchſten Beytrag rechnen muſsten, ſo war es eine Frage, ob das von ihnen nach den Umſtänden gezahlte als ihr wirklich geleiſteter Beytrag zu betrachten, und bloſs nach der Gröſse deſſelben auch die Gröſse der eventuellen Penſionen zu berechnen, die ſie als ihre Foderung aufführen konnten? Sie hatten doch alles geleiſtet, was nach dem Plan von ihnen gefodert, und als hinreichend für ihre Anwartſchaft gefodert war. Konnten ſie nicht verlangen, ſo

angeſehen

Digitized by Google

angeſehen zu werden, als hätten ſie alle in dieſer Hinſicht daſſelbe geleiſtet, nämlich alle, ſowohl die weniger, als die mehr gegeben hatten, das geleiſtet, wozu ſie ſich nach dem Contract verpflichtet hatten, und was, rechtlich die Sache betrachtet, alles war, was ſie zu leiſten hatten? Daſs zufällig einige mehr, andere minder gegeben, ohne ihre Schuld, war das ein Grund, ihre Foderungen nach dieſer unverſchuldeten und zufälligen Verſchiedenheit ſchätzen zu laſſen? Nach dem Contract hatten ſie ihre Anwartſchaften *völlig* bezahlet; muſsten dieſe nicht alſo auch ohne Kürzung als Foderungen an die Caſſe ihnen zugeſtanden werden?

3) Es war die Frage: nach *welchen Beyträgen* ſollten die *Eherenten* gerechnet werden, welche die ſtehenden Ehen noch ſchuldig waren? Es lieſs ſich voraus ſehen, daſs die Beyträge bald bis zu ihrer höchſten Grenze geſtiegen ſeyn würden? Aber noch waren ſie nicht dahin, als die Auseinanderſetzung vorgenommen werden muſste. Es kam in Vorſchlag, die wirklich gezahlten Beyträge auf ihren Werth beym Eintritt in die Geſellſchaft zu reduciren, daraus die *mittlere Gröſse* des jährlichen oder halbjährlichen Beytrags zu berechnen; aus dieſer wiederum den Werth der dadurch bezahlten Anwartſchaft, und darnach auch die Gröſse deſſen, was ein ſtehendes Ehepaar der Zeit an die Caſſe noch ſchuldig ſey, zu beſtimmen. Hat dieſs mehr Gründe für ſich, als wenn man die zu fordernden Anwartſchaften, und



Digitized by Google

die zu zahlenden Eherenten, beyde nach ihrem wahren Werth, nach richtigen Tabellen berechnen, und vorausſetzen wollte, es ſey jede Erwartung völlig bezahlet, und jede noch ſchuldige Zahlung auch völlig nach ihrem wahren Werthe zu leiſten? Ich geſtehe, ich kenne keine Grundſätze, woraus man beweiſen könne, es ſey die eine Art zu rechnen mehr der Natur der Sache gemäſs, mehr nothwendig und mehr gerecht und billig als die andere. Dem Contract ſchien mir die letztere am gemäſseſten zu ſeyn.

4) *Wie ſollten die als verloren hingegebene Antrittsgelder angeſehen werden?* Als *Einſätze* zu einer Penſion, oder als *baare Gelder*, die als reine Foderungen mit ihren Zinſen aufgeführet werden konnten? Nach welchem Grundſatz waren ſie das erſtere und nicht das letztere? Da in dem Plan gar kein Maaſsſtab war, wornach ihr Werth als Einſätze beſtimmt werden konnte, ſo muſste ſolches nach andern Tabellen geſchehen. Da kam man wiederum auf die Frage: ſind die Intereſſenten genöthiget, nach dieſen letztern ſich richten zu laſſen, da ſie ſich nie ihnen unterworfen hatten, und auf die, wenn man gewuſst, daſs es nothwendig ſey, ſich nach ihnen zu richten, ſie ſich nicht eingelaſſen haben würden.

Ich geſtehe, dieſe Zweifel haben mich abgehalten, ſolchen Auseinanderſetzungs-Methoden, als Hr. *Florencourt*, und damals in der Calenbergiſchen Angelegenheit, die

Digitized by Google

die Herren *Karſten* und *Kritter* vorgeſchlagen, meinen Beyfall zu geben. Billig, wenn anders hier Billigkeit und Gerechtigkeit zu trennen war, ſchien ſie mir noch weniger zu ſeyn. Die Foderungen *der Wittwen* wurden, obgleich als Foderungen auf fällige Penſionen berechnet, ſehr heruntergeſetzet. Sollten die Wittwen ganz entſchädiget werden, ſo muſsten ihnen Leibrenten gekauft werden, nach ihrem damaligen Alter. Was ſie alſo durch die Aufhebung des Contracts litten, beſtand in dem Unterſchied zwiſchen dem Werthe ihrer Leibrenten und dem, was ihnen nunmehro nach dem Verhältniſs ihrer Foderungen, aus dem vorhandenen Caſſenbeſtand zufallen konnte. Das letzte war ſehr gering in Vergleichung mit dem erſtern.

Dagegen konnten die Ehefrauen ſich das, was ſie verloren, durch einen baaren Einſatz oder durch Beyträge nach richtigen Tabellen wieder erwerben. Die wenigen ausgenommen, deren Männer Krankheit oder Alter von ſolchen Inſtituten ausſchloſs. Alsdenn verloren die Ehefrauen nichts mehr, als den Ueberſchuſs deſſen, was ſie nach andern Tabellen geben muſsten, über das, was ſie hätten in der Geſellſchaft geben müſſen, worin ſie waren, wenn dieſe Beſtand gehabt. Das war ein viel geringerer Verluſt als der Wittwen ihrer. War es gerecht und billig, daſs die eine Parthey aus dem Caſſenbeſtand ihren kleinern Schaden noch zum Theil vergütet haben wollte, da die andere, auch wenn ſie alles behielte,

Digitized by Google

behielte, was da war, noch mehr leiden mufste als jene? Dafs man den Ehefrauen anmuthen wollen, um den Schaden der Wittwen bis zur Gleichheit mit dem ihrigen zu bringen, von neuen noch etwas herzugeben, noch mehr, als sie bisher verwandt hatten, ging unmöglich an. Aber wenn sie an dem Cassenbestand Anspruch machen wollten, um ihren Schaden zu vermindern, da der andern Parthey ihrer viel gröfser war, und nicht diese, sondern jene die Aufhebung der Gesellschaft verlangte, so war das etwas, wovon ich nicht sehe, wie es sich auch nach den Grundsätzen der Gerechtigkeit hatte durchsetzen lassen. Man sagte zwar mit Hrn. *Florencourt*, das Recht sey den Wittwen hart, das Herz müsse für sie sprechen. Ich gestehe, ich glaube, auch die Vernunft spreche für sie, und vielleicht, wenn der Proceſs seinen Fortgang gehabt, mögten auch die Richterstühle für sie gesprochen haben.

So war meine Meinung. So schien es auch aufser dem Hrn. *von Drateln*, den beyden würdigen Männern, dem Herrn *Archiater Hensler* und dem Herrn *Prof. Büsch*, mit denen ich gemeinschaftlich das Interesse eines grofsen Theils der Genossen wahrzunehmen hatte. Noch ehe ich ihr Gehülfe bey diesem Geschäffte ward, hatten sie schon zum Grundsatz genommen, dafs die Genossen an den eigentlichen Cassenbestand der Gesellschaft, der in den aufgesammelten Zinsen bestand, keinen Anspruch machen, sondern ihn ganz den Wittwen

überlassen

überlaſſen müſsten. Wir hatten das Intereſſe der Genoſſen zu beſorgen, aber wir hatten nicht den Auftrag, gegen die Wittwen ungerecht zu ſeyn, nicht den, die Vortheile unſerer Committenten auf jede Art, billig oder unbillig, zu vergröſsern. Wir hielten es daher in dem Proceſs auch gar nicht für gerathen, uns mit den Wittwen einzulaſſen, und dieſen unſere Foderungen entgegen zu ſetzen. Wir foderten das, was wir glaubten fodern zu können, da, und von denen, wo und von welchen wir glaubten, es fodern zu müſſen, von der Landſchaft nämlich, mit der wir contrahirt hatten, und verwieſen die Wittwen auch dahin. Von Anfang an giengen unſere Vorſchläge ſchon auf den Vergleich, der am Ende bis auf einige Nebenpuncte, worin zur Vermeidung eines koſtbaren und mühſeligen Proceſſes nachgegeben werden muſste, angenommen worden iſt, daſs nämlich den Wittwen der ganze Zinſenfond, den man als Caſſenbeſtand anſehen konnte, überlaſſen wurde. Schade fürs Inſtitut, daſs man nicht früher ſich dahin vereinigte. Es ſchien dieſs das einzige Mittel zu ſeyn, die Knoten zu löſen, wenn gleich ein paar Faſern durchgeſchnitten werden muſsten, die zu verwickelt und zu wenig erheblich waren, um ſich dabey aufzuhalten.

## 29.

Die nächſte Anwendung, die von der bisherigen Unterſuchung gemacht werden kann, wird bey der *veränderten Calenbergiſchen Geſellſchaft* vorkommen.

Nach

Nach dem *neuen approbirten Plan* wird 1) *den Genoſſen* die richtige Auszahlung der Penſionen für die Wittwen *garantirt*. 2) Es erhält die Caſſe der Geſellſchaft von der Landſchaft einen *jährlichen Zuſchuſs* von 6000 Rthl. auf 30 Jahre, was nach 4 Procent gerechnet, ſo viel iſt, als baar 103752 Rthl. Davon ſoll zunächſt der Schaden abgehalten werden, der durch die Genoſſen entſtehen wird, die man ohne Geſundheitsſcheine bey der neuen Einrichtung zugelaſſen hat. Dann aber ſoll das übrige der Caſſe überhaupt zu gute kommen, und zur Erleichterung der Genoſſen gebraucht werden, falls nicht Defecte entſtehen, zu deren Erſetzung er erfordert wird. Auch 3) ſoll *aller ſonſtiger Ueberſchuſs*, ſobald erweislich wird, daſs er entbehrlich ſey, den Intereſſenten zugerechnet werden. Dagegen 4) im Fall ſich dieſer Beyhülfe ohngeachtet Defecte bey der Caſſe zeigen, die Intereſſenten, zur Erſetzung derſelben eine Erhöhung der tabellariſchen Beyträge auf 5 Procent (ob der *Beyträge* ſelbſt, oder der verſicherten Penſionen, iſt nicht beſtimmt,) und die Wittwen eine Verminderung der Penſionen auf 10 Procent, ſich gefallen laſſen müſſen; jedoch beydes nicht höher, bis ſo weit. Noch ſind ſowohl die Beyträge als die baaren Einſätze nach Tabellen berechnet, in denen die Sterblichkeit des weiblichen Geſchlechts geringer angenommen iſt, als die des männlichen. Auf den Unterſchied zwiſchen ausgeſuchten und nicht ausgeſuchten Geſellſchaften iſt dagegen nicht geſehen.

30. Dieſe

30.

Dieſe Einrichtung iſt zwar im Anfang ſehr hart, in der Folge aber ſehr vortheilhaft für die Intereſſenten. Dieſe ſind gedeckt gegen alle Gefahr, und dagegen ſicher, daſs ſie nichts mehr *wirklich* zahlen ſollen, als wirklich der Zweck der Geſellſchaft erfodert, oder, daſs ihnen das zuviel gezahlte zurück gegeben werden ſoll, wenn ſich findet, daſs es zu viel iſt. Und dann ſoll ihnen der landſchaftliche Zuſchuſs noch zur Erleichterung ſeyn. Es wird alſo nur darauf ankommen, daſs der Ueberſchuſs, ſobald er da iſt und entbehrlich, auch bald zur Vertheilung gebracht werde, wie es die Abſicht nach §. 19. des Plans iſt. Und die Erwartung des Ueberſchuſſes iſt nicht unwichtig. Es ſind ſo wenig ſchwache Genoſſen bey der Geſellſchaft geblieben, daſs dieſe im Ganzen als eine Geſellſchaft aus dem gemeinen Leben, deren Sterblichkeit nicht gröſser iſt, als die tabellariſche, angeſehen werden kann. Die Vortheile aus der mindern Sterblichkeit bey ausgeſuchten Mitgliedern können wegfallen, aber Schaden wird auch daraus nicht entſtehen. Nach dem Verhältniſs der Schwachen zu den Geſunden läſst ſich erwarten, daſs jene von dieſen getragen, und die Geſellſchaft, auf die gewöhnliche Art berechnet, ſich ſelbſt ohne fernere Unterſtützung erhalten könne. Auſserdem ſind die Schwachen gewiſſen Bedingungen unterworfen, wodurch der Schaden, den ſie bringen mögten, verringert wird. Und ſogar bey denen,

denen, die Geſundheitsſcheine beygebracht, iſt, wenn ſie auf Beytragsfuſs ſtehen, die läſtige Verpflichtung gemacht, daſs, falls die Männer vor Ablauf des vierten Theils der wahrſcheinlichen Ehedauer ſterben, die Wittwen bis dahin ſich die Beyträge von ihren Penſionen kürzen laſſen müſſen. Dieſe beyde Beſtimmungen laſſen ſchon einigen Ueberſchuſs erwarten, wenn man auch zugiebt, daſs die angenommene geringere Sterblichkeit des weiblichen Geſchlechts im Erfolg ſo ſeyn werde, als in den Tabellen vorausgeſetzet iſt. Aber auſser jener Erwartung kommt noch der Landſchaftliche Zuſchuſs von mehr als 100000 Rthl. in Betracht, der auf 500 bis 600 Individuen vertheilet, für jeden einzelnen etwas wichtiges werden kann.

## 31.

Es iſt nicht beſtimmt, ob im Fall des Ueberſchuſſes auch die *Wittwen* als Theilnehmer angeſehen werden ſollen? Man hat nur auf die Erleichterung der *Beyträge* gedacht. Sollen diejenigen, welche auf *Capitalfuſs* geblieben ſind, nicht auch Antheil daran haben? Sie haben in dem vorausgeſetzten Fall eben ſo wohl über das Nöthige bezahlt, als die andern? Und da die Geſellſchaft ausſtirbt, ſollen denn die nach Abgang aller Ehen noch entſtehende Ueberſchüſſe, nicht den zuletzt lebenden Wittwen zu Nutzen kommen? Es wäre zu bedauren, wenn dieſe Unbeſtimmtheit künftig zu Miſshelligkeiten

Anlaſs

Digitized by Google

Anlaſs geben ſollte. Der natürlichen Billigkeit halte ichs gemäſs, anzunehmen, *daſs alle im Anfang beygetretene Ehefrauen wie Intereſſenten anzuſehen ſind, unter denen der Ueberſchuſs zu vertheilen iſt.* Die, deren Männer auf Capitalfuſs eingeſetzet haben, darum, weil ihre Männer eben ſowohl als die Contribuenten, mehr als den wahren Werth der Renten bezahlet haben. Diejenigen aber, deren Männer Beyträge gegeben, müſſen ohnedieſs nach dem Plan noch gewiſſe Jahre die zurückgebliebenen Beyträge nachzahlen, oder ſich kürzen laſſen. Aber wenn dieſe Bedingung auch nicht da wäre, ſo leiſten doch, nach der Natur ſolcher Geſellſchaften, die Contribuenten eben ſo viel, als die auf einmal bezahlen. Wie viel oder wenig wirkliche Zahlungen von Einzelnen geleiſtet werden, kommt nicht in Betracht. Es iſt eben ein weſentlicher Zweck ſolcher Anſtalten, daſs dieſs nicht in Betracht kommen ſoll.

## 32.

Ein zweyter Grundſatz, den ich hier annehme, iſt dieſer: *So bald die Frau ſtirbt, hört die Genoſſenſchaft auf, und alle Theilnehmung an dem Ueberſchuſs wie an den Defecten.* Die auf Capitalfuſs eingeſetzet haben, hinterlaſſen ihr Geld der Geſellſchaft, worauf dieſe noch künftig gewinnen kann, und hier wahrſcheinlich gewinnen wird. Sie haben über das nöthige bezahlt. Allein da dieſs von einem künftigen Erfolg abhangen ſoll, alſo

im voraus als ungewiſs dahin ſtehet, ſo daſs es als Zufall anzuſehen iſt, wenn es geſchieht, ſo hören ſie auf gleichſam am Spiel Theil zu nehmen, ſobald ſie abtreten. Ich rede nur von den *Frauen*, die noch Intereſſenten bleiben im Wittwenſtande. Aber wenn die Frau geſtorben iſt, ſo hört ihr Riſico auf zu verlieren, und ſo auch ihre Erwartung zu gewinnen. Ich will hiemit niemanden in ſeinem Urtheil vorgreifen. So ſtelle ich mir aber vor, ſey es der Natur des neuen Contracts gemäſs.

## 33.

Dieſe Grundſätze angenommen, ſo iſt noch eine Schwierigkeit zu berühren. Sie hat nicht viel auf ſich, nur in Sachen, wo alles von Mehr und Minder abhängt, iſt es bey denen, die dieſs nicht ſchätzen können, ſo gewöhnlich, Mücken zu Elephanten, als Elephanten zu Mücken zu machen. Sie beſteht darinn. Geſetzt es entſtehe im Anfang ein entbehrlicher Ueberſchuſs, und dieſer werde vertheilet. Wenn nun nachher ſich Defecte zeigen, ſo iſt der ſchon ausgetheilte Gewinn nur in ſo ferne wieder zurück zu fodern, ſo weit er den noch übrigen Intereſſenten zugefallen iſt; was aber an die abgegangenen gekommen, iſt unwiederbringlich verloren. Wer erſetzet dieſs, im Fall es doch wieder herbey geſchaffet werden müſste? Der Garant ſteht zwar für die Defecte, ſo weit dieſe durch die planmäſsigen Zahlungen nicht zu heben ſind; aber was darum nur fehlen

würde,

würde, weil vorher ein Ueberſchuſs vertheilet iſt, hat er nicht garantirt. Und es iſt nicht zu erwarten, auch nicht von ihm zu fodern, daſs er die einmal beſtimmte Garantie noch weiter ausdehnen werde. Soll alſo der Garant eine Vertheilung des Ueberſchuſſes geſchehen laſſen, *ſo müſſen die übrigbleibenden Intereſſenten für dasjenige, was an die abgegangenen vertheilet iſt, einſtehen, auſser daſs ſie ſelbſt verpflichtet ſind, ihre eigene Portionen im Nothfall zurück zu geben.*

Daraus würde die Folge entſtehen, es ſey möglich, *daſs die an die abgegangenen Intereſſenten vertheilete Summe ſo viel austrage, als der ganze an ſich mögliche Verluſt, den die nachgebliebenen noch leiden können.* Wenn das iſt, ſo iſt der Garant ganz ſeiner Garantie entlaſſen; indem die überlebenden ihm für mehr haften, als er für ſie im äuſserſten Fall zu zahlen ſchuldig ſeyn würde. Die letzten ſind alsdenn ohne Garantie.

So iſt es. Aber was ſchadet das? Die zurückgebliebenen haben in dieſem Fall 1) noch immer ſo viel in Caſſa, als zu ihren Bedürfniſſen auf künftig nach eben den Tabellen hinreichet, wornach man Anfangs gerechnet hat. 2) Auch iſt ſo viel als ihr Riſico beträgt, oder der zu erwartende Verluſt, noch zurück behalten. Ich ſetze voraus, daſs nach den obigen Vorſchriften in §. 9. verfahren ſey. Sie ſind alſo dadurch für den künftigen Verluſt gedecket, und haben noch einen eben ſo

groſsen Vortheil zu erwarten. 3) Sie haben an allen vorhergegangenen Dividenden Antheil genommen; alſo im voraus ſchon Vortheil hinweg. Sie können daher ohne Bedenken auf alle fernere Garantie Verzicht thun.

## 34.

Hält man indeſſen die zurückbleibenden Intereſſenten hiedurch noch nicht genug gedeckt, ſo nehme man zum Grundſatz an, *es ſolle nichts mehr zur Vertheilung kommen von dem Ueberſchuſs, als ſo viel, daſs was unvertheilet in der Caſſe zurückgeleget wird, mit dem zuſammen genommen, was bey der Vertheilung auf die übrig gebliebenen Intereſſenten fällt, dem gröſsten möglichen Schaden gleich ſey, den die Caſſe bey den letztern noch leiden könne.* Die völlige Garantie iſt alsdenn immer in den Händen der Intereſſenten und in der Caſſe.

Es ſey der *Ueberſchuſs* auf die obige Art berechnet, S, die Summe, welche ſo groſs iſt, als der *an ſich mögliche gröſste Verluſt* bey den fortlebenden Intereſſenten, *W*, (der nämlich entſtehen würde, wenn alle Ehemänner ſo gleich im nächſten Jahre ſterben, und alle Frauen das höchſte menſchliche Alter erreichen, was erſtaunlich unwahrſcheinlich iſt, ſo lange die Geſellſchaft noch etwas groſs iſt). Ferner *der Antheil*, der auf die *lebenden* Intereſſenten fallen wird, R, und *der Antheil*, der den *abgegangenen* zugehört, T.

Alsdenn

Alsdenn *würde zur Vertheilung kommen*
S — (W — R) = R + T, oder S — W = T.

Das Verhältniſs T : R ſey = h : 1. Es läſst ſich dieſs aus dem Verhältniſs der anfänglichen *Einſätze*, worauf auch die Beyträge reducirt werden, leicht ausmachen. Demnach iſt S — W = h. R. So lange alſo noch *der Ueberſchuſs nicht gröſser iſt, als der bey den Nachbleibenden mögliche gröſste Caſſenverluſt, kommt nichts zur Vertheilung.* Es wird alſo länger dauren, ehe es dahin kommt. Aber die Gröſse W nimmt immer ab, nicht nur dadurch, daſs die Zahl der Uebrigbleibenden ſich vermindert, ſondern auch, weil der Werth des gröſsten möglichen Schadens bey den einzelnen abnimmt. Uebrigens iſt dieſe Gröſse leicht zu finden. Man hat aus dem Alter jeder Frau die Gröſse der *Zeitrente* auf ſo viele Jahre als ihre Altersergänzung beträgt. Die Summe iſt die an ſich mögliche gröſste Ausgabe. Man ziehe dieſe ab von dem *baaren Caſſenbeſtand*, ſo iſt der Reſt ſo groſs als W.

Die Berechnung des Dividendi iſt das erſtemal darnach nun gemacht. Kommt es dann wiederum zur Vertheilung, ſo giebt ſich von ſelbſt folgendes: Die *Uebrigbleibende* haben nun ſchon von der vorhergehenden Vertheilung etwas in Händen, das auf ſeinen dermaligen Werth reducirt auch eine Summe ausmacht, ſie ſey D. So kommt in dieſem zweyten Theilungstermin zur

Vertheilung S — (W — D — R), und dieſs iſt wiederum = R + T.

In dem Termin, wo W = D + R iſt, wird *der ganze Ueberſchuſs der Caſſe vertheilet werden.*

Das iſt auch nichts weniger als unbillig. Wenn dieſer Fall eintritt, ſo haben die Uebriggebliebenen ſchon ſo viel weg, als bey ihnen in dem äuſserſt möglichen Fall verloren gehen kann, und auſserdem für die Zukunft alles nöthige nach den Tabellen. Wenn nun auch von dieſer Periode an, durch einen ſonderbaren Zufall, jedesmal Defecte entſtünden, ſo geht die bloſs abſolute Möglichkeit des Verluſtes nicht weiter, als daſs die vorher gewonnenen Portionen wiederum verloren gehen.

Zugleich iſt aber auch klar, daſs ſobald W — D — R *kleiner wird*, als *das gröſste zu erwartende Rifico für die Zukunft*, ſo kommt mehr zur Vertheilung bey Befolgung des hier angenommenen Grundſatzes, als wenn zur Regel gemacht wird, *daſs jedesmal das gröſste Rifico zurück bleiben ſoll.*

## 35.

Das einmal *Vertheilte* vom Ueberſchuſs gebrauchen die *contribuirenden* Intereſſenten zur Erleichterung ihrer Beyträge, die *Wittwen* empfangen es als einen Zuſchuſs zu ihrer Penſion, und verbrauchen es. Die auf *Capitalfuſs ſtehende Ehemänner* laſſen es ſich zurück zahlen, oder

bey

bey der Caſſe verwahren, und für ihre künftige Wittwen aufheben. Dabey iſt aber zu bemerken, „daſs wenn die „Caſſe es behält bloſs als ein Depoſitum, ſo müſſe es, im „Fall die Frau vor dem Manne ſtirbt, an dieſen zurück „gegeben werden.“ Es iſt ſein Geld. Soll es in *eine künftige eventuelle Wittwenpenſion* verwandelt werden, ſo wird es ein *neuer Einſatz*, und muſs als ein ſolcher geſchätzet werden nach den Tabellen. Allein das iſt denn ſo viel, als wenn die Geſellſchaft neue Mitglieder aufnähme. Die übrigen Mitglieder, die Contribuenten und Wittwen können ſich das zwar gefallen laſſen, allein es iſt nicht ganz dem Intereſſe derer gemäſs, die zunächſt darnach abgehen, weil durch dieſe neuen Einſätze auch die Werthe von *W* wiederum vergröſſert werden, und zwar mehr als auch D und R vergröſsert wird. Soll niemanden zu nahe geſchehen, ſo müſſen die auf Einſatz ſtehende ihren Antheil jedesmal aus der Caſſe zurück nehmen, wenn dieſe es nicht als eine *Sparcaſſe* ihnen aufheben und mit ſeinem Betrag in der Folge beſonders auszahlen will.

## 36.

Werden nun die von den Intereſſenten zurück empfangene Theile von ihnen verbraucht, ſo haben die zuletzt übriggebliebene, wie ſichs verſteht, nichts mehr für die Zukunft, als was nach den Tabellen erfodert wird. Und die Garantie hat aufgehöret. Will man

alſo auch hierauf Rückſicht nehmen, und auf keine Art die letztlebenden Wittwen ungeſichert ſeyn laſſen, ſo kann zu jenem obigen Grundſatz der Vertheilung (in §. 31.), noch hinzugefüget werden, *daſs im Fall in dem folgenden Diſtributionstermin*, W — D — R *kleiner wird, als das Riſico für die nachbleibende Geſellſchaft, ſo ſolle dieſs letztere Riſico zurück behalten, und alſo nie mehr als was darüber hinausgeht, diſtribuirt werden.* Alsdenn hat der längſtlebende Intereſſent, ſo gar wenn er ſchon ſo viel vorher mehr empfangen hat, als er möglicher Weiſe bey der Leibrente, die für ihn in der Caſſe iſt, zu kurz kommen kann, auſser dieſer Leibrente auch noch das Riſico für den zu erwartenden Verluſt. Es kann am Ende ein geringer Reſt auf dieſe Art in der Caſſe übrig bleiben, der immerhin ad pios uſus verwandt werden mag.

## 37.

Die Art, wie die Rechnung bey der Caſſe zu dieſem Zweck zu führen ſey, und wie ſie am leichteſten zu führen ſey, wird ſich von ſelbſt geben. Auſser den Columnen, die man (nach §. 3.) zur Berechnung des Caſſenbeſtandes gebrauchet, iſt nur noch eine nöthig, worin die Werthe der *Zeitrenten auf die Altersergänzung der Frauen*, verzeichnet ſind. Ihre Summe giebt jedesmal die möglich gröſste Ausgabe. Alsdenn iſt alles vorbereitet und das übrige weiſet die Natur der Sache dem Rechnungsverſtändigen von ſelbſt an.

Sechste

## Sechste Abhandlung.

### *Von Wittwenrenten, die von gewiſſen Bedingungen abhangen.*

#### I.

Die *Wittwenpenſionen, die gleich nach dem Tode des Ehemanns laufend werden*, ſind der Natur der Sache nach koſtbar, und es iſt das Riſico, worin ſich der Käufer ſetzt, eine Summe Geldes unnöthiger Weiſe auszugeben, nicht unbeträchtlich. Das iſt auch ſehr begreiflich. Wer durch jährliche Beyträge zahlen will, kauft die Sicherheit auf eine gewiſſe Summe für ſeine Wittwe, das iſt ein Wittwenthum für ſie; und giebt dazu kein Capital her. Wie würde das möglich ſeyn, wenn er nicht eine jährliche Laſt dafür übernehmen wollte, die ihm drückend werden kann? Bey dem Contribuenten ſteht die Caſſe in Gefahr vorzüglich zu verlieren; ſie muſs alſo auch die Erwartung haben, viel zu gewinnen.

Dieſe Art Wittwenrenten, die *gleich fällig* und von *beſtimmter Gröſse* ſind, ſich zu kaufen, iſt auf einer Seite ein *Aeuſſerſtes* in Hinſicht des Riſico, was damit verbunden wird. Man ſpielt am ſtärkſten. Wenn dagegen ein Ehemann ſich für ſeine Wittwe eine eigene Caſſe macht, oder in eine ſo genannte *Sparcaſſe* einſetzt, eine

Summe auf einmal, oder jährlich etwas, ſolches mit Zinſen auf Zinſen ſammlet, ſo iſt das eine Art, für die Wittwe zu ſorgen, *bey der für ihn gar nichts* in Hinſicht der Ausgabe *risquirt wird.* Nur ſteht er in Gefahr, ſeinen Zweck zu verfehlen. Er kann ſterben, ehe das Aufgeſammelte zur abgezielten Verpflegung der Wittwe hinlänglich iſt. In dieſem letztern Fall gehört das nicht zu der Art von Verſorgungsanſtalten, die durch geſellſchaftliche Verbindung entſtehen. Ein jeder ſorget alsdenn für ſich allein, und hat auch für ſich allein den Erfolg, der entſteht. Es iſt keiner, der eine Verſorgung erhalten und ſicher erhalten kann, die gröſser iſt, als jeder ſie allein ſich hätte durch Sparen verſchaffen können. Soll einer dem andern zu Hülfe kommen, der keiner Hülfe bedarf, dem der ſie nöthig hat, ſo kann das nicht ſeyn, ohne daſs etwas dabey für den einen verloren gehe, was dem andern zu Nutzen kommt. *Bloſs Aufſparen der Gelder iſt alſo ein zweytes Extremum*, wobey nichts aufs Spiel zu ſetzen iſt für andere.

Daraus entſteht natürlich die Frage, ob es nicht ein Mittel gebe, zwiſchen beyden, was vielleicht manchem mehr zu empfehlen ſeyn mögte? Der Reiche kann leichter eine Summe aufs Spiel ſetzen, als der wenig hat. Vernünftig iſt es für den letztern immer, ſo wenig zu wagen als möglich iſt; nur daſs ſein Zweck, den er haben muſs, doch ſicher erreichet werde.

Die

Digitized by Google

Die Penſionen können z. B. *abhängig* gemacht werden *von der Zeit, die der Mann, nachdem er die Rente gekauft hat, noch lebet.* Er habe baar bezahlet, oder er ſtehe auf Beyträge, ſo wird weniger von der Caſſe und von ihm gewaget, wenn die Penſion ſich nach der Zeit richtet, die der Mann als Mitglied der Geſellſchaft fortlebet. Es hat dieſe Einrichtung etwas ſehr angemeſſenes. Deſto mehr Penſion ſeiner Wittwe erwerben wollen, je länger man lebet, iſt ein Vorhaben, das leichter ausführbar ſeyn muſs, als auf einmal ihr alles verſichern zu wollen. Dieſe innerliche Natürlichkeit ſcheint ſie vorzüglich zu empfehlen. Sie kam auch bey der letzten Veränderung der Calenbergiſchen Geſellſchaft in Betracht; und bey dem Project zu einer Mecklenburgiſch - Schwerinſchen Wittwencaſſe war ſo etwas angebracht.

Ueberhaupt kann ein Ehemann, der ſeiner Frau eine Penſion verſichern will, auf manche Umſtände Rückſicht zu nehmen haben. Seine Wittwe iſt vielleicht auf einige Jahre nach ſeinem Tode ohnedieſs verſorget, nur nicht auf viele. Er kann alſo eine Rente für ſie wünſchen, die erſt nach gewiſſen Jahren ihres Wittwenſtandes fällig wird. Ein anderer braucht für ſeine Frau bis auf gewiſſe Jahre ihres Alters hin nicht zu ſorgen. Nur wenn ſie älter wird, ſieht er ſie in Verlegenheit. Dieſer kann wünſchen, ſo eine Wittwenrente kaufen zu können, die gerade zu dieſem Bedürfniſs paſst, die auch nicht ehe als bey einem gewiſſen Alter der Frau fällig

werden

werden darf. Ein dritter findet es nicht zu schwer, auf gewisse Jahre starke Beyträge zu geben, nur kann er das nicht auf immer, die ganze Ehezeit durch, beym Anwachs seiner Familie. Dieser wünscht mit Beyträgen, die nur auf eine gewisse Zeit von Jahren dauern, dann aufhören, abzukommen. So mehr. Die Bedürfnisse sind unterschieden, und nur allein für Bedürfnisse sollten die Versorgungsanstalten seyn. Aber deswegen sollten sie auch so eingerichtet werden, dass jederman nach seinem Bedürfniss, und nur darnach sich ankaufen könne. Ein Institut, das allgemein und vollständig seyn soll, erfordert nach dem Beyspiel des Hamburgischen, verschiedene Classen und Arten, die Wittwenpensionen sich kaufen zu können. Auf alle mögliche Verschiedenheiten dabey Rücksicht zu nehmen, ist weder nöthig noch thunlich. Nur die vornehmsten sind in Betracht zu ziehen.

Was von *Wittwenrenten* gilt, läßt sich auf alle Renten, die auf den Fall des Ueberlebens einer Person über die andere empfangen werden, anwenden. Die Gründe, nach denen die Werthe solcher Renten zu berechnen sind, wird man in der *Einleitung zur Berechnung der Renten* finden. Einige Anwendungen davon werden besonders wichtig für die Praxis, worüber ich hier noch einige Sätze nachholen werde.

2. *Auf-*

Digitized by Google

## 2.

*Aufgabe* 1. *Die Gröſse der jährlichen Beyträge für die Wittwenpenſion* 1 *zu finden, wenn dieſe nur auf eine beſtimmte Zahl von Jahren, daferne die Ehe ſo lange dauert, erleget werden ſollen.* Das Alter des Mannes ſey $a$, der Frauen $b$, und die Zahl der Beytragsjahre $n$.

*Auflöſung.*

1) Man ſuche den Werth der *Eherente* $\lambda\overline{a\,b}$.

2) Auch den Werth der auf $n$ Jahre *aufgeſchobenen Eherente* (nach *Einleitung* Cap. 3. Abſchn. 2. §. 143.) und ziehe dieſe von jenem ab, ſo erhält man den Werth *einer auf n Jahre dauernden und denn aufhörenden Eherente.*

3) Man ſetze, wie der letztgefundene Werth der nach $n$ Jahren aufhörenden Eherente ſich verhält zu der ganzen Eherente, ſo der *jährliche Beytrag auf die ganze Ehezeit*, aus den Tabellen, *zu dem geſuchten jährlichen Beytrag, der nur n Jahre durch gegeben werden ſoll.*

*Beweis.* Es iſt für ſich klar. Es ſoll der Werth der Wittwenrente durch eine nach $n$ Jahren aufhörende Eherente abgetragen werden. Heiſst der Beytrag die ganze Ehezeit durch in den Tabellen, B, ſo iſt B $\lambda\overline{a\,b}$ der Werth der Rente. Nun ſey der geſuchte Beytrag B′, und die aufhörende Rente N, ſo muſs B′. N eben ſo viel ſeyn. Alſo $N : \lambda\overline{a\,b} = B : B'$.

*Ex.*

*Ex.* a = 35, b = 30 Jahr, n = 15 Jahr, so ist nach dem 4 Procentfuss gerechnet, $\lambda \overline{a\,b} = 10;7816$, und B = 0,3050. (Tab. XXIV. XXVII.) Die auf 15 Jahre *aufgeschobene Eherente* oder Verbindungsrente (nach §. 143. *Einleit.* berechnet) ist 2,5847. Also ist die nach 15 Jahren aufhörende 10,7816 — 2,5847 = 8,1969, und der gesuchte Beytrag

$$\frac{10,7816.\ 0,3050}{8,1967} = 0,4012.$$

*Zusatz* 1. Soll der *Beytrag veränderlich seyn*, steigen oder fallen nach einem arithmetischen oder geometrischen Verhältniss, so lässt sich die allgemeine Methode, den Werth desselben zu finden, aus den Sätzen des 2ten Capitels der *Einleitung* leicht angeben.

*Zusatz* 2. Soll der *Beytrag geometrisch abnehmen*, die ganze Ehezeit aber fortdauern, der erste Termin aber voraus bezahlt werden beym Ankauf, so sey $\beta$ der Beytrag im Anfang, $\frac{1}{n}$ der Exponent des Verhältnisses, A, B, $\overline{{}^{1}A}$, $\overline{{}^{1}B}$, u. s. f. die gewöhnlichen Zahlen für das Alter *a* und *b*, und man hat

$$\beta + \frac{\beta}{A\,B} \cdot \left( \frac{\overline{{}^{1}A}\ \overline{{}^{1}B}}{n\ r} + \frac{\overline{{}^{2}A}.\ \overline{{}^{2}B}}{n^2\ r^2} + + \right) = E,$$

dem baaren Werth der hier gesuchten Wittwenrente.

Nun ist $\frac{1}{A\,B} \cdot \left( \frac{\overline{{}^{1}A}.\ \overline{{}^{1}B}}{n\ r} + \frac{\overline{{}^{2}A}.\ \overline{{}^{2}B}}{n^2\ r^2} + + \right)$

der Werth einer Eherente nach dem Zinsfuss *nr* berechnet.

Digitized by Google

rechnet. Sucht man dieſen (nach §. 139. der *Einleit.*) er ſey N, ſo iſt $\beta = \frac{E}{N+1}$.

*Zuſatz* 3. Das Steigen der Beyträge wird in Praxis nicht leicht vorkommen, weil es natürlicher iſt, den Beytrag herunter zu ſetzen mit den Jahren, wie das Bedürfniſs für die Wittwen abnimmt, als ihn zu erhöhen, und mehr für die Rente zu geben, je weniger man ihrer nöthig hat. Das Riſico der Caſſe wird dabey gröſser.

*Zuſatz* 4. Soll ſie aber *ſteigen* im umgekehrten Verhältniſs mit dem Diſconto $\frac{1}{r^n}$, ſo iſt

$$\frac{1}{AB} \cdot \left( \frac{{}^{1}\!A \cdot {}^{1}\!B}{r} \cdot r + \frac{{}^{2}\!A \cdot {}^{2}\!B}{r^2} \cdot r^2 + + \right)$$ ſo groſs, als die Dauer der Verbindung. Dieſe iſt $C\overline{a\,b}$, und $\beta = \frac{E}{1 + C\overline{a\,b}}$.

*Zuſatz* 5. Soll ſie ſteigen im umgekehrten Verhältniſs mit $\frac{{}^{1}\!A}{r}$, $\frac{{}^{2}\!A}{r^2}$, u.ſ.f. oder mit $\frac{{}^{1}\!B}{r}$, $\frac{{}^{2}\!B}{r^2}$ und ſo ferner, ſo wird

$$\frac{1}{AB} \cdot \left( \frac{{}^{1}\!A \cdot {}^{1}\!B}{r} \cdot \frac{r}{{}^{1}\!A} + \frac{{}^{2}\!A \cdot {}^{2}\!B}{r^2} \cdot \frac{r^2}{{}^{2}\!A} + + \right)$$

oder

$$\frac{1}{AB} \cdot \left( \frac{{}^{1}\!A \cdot {}^{1}\!B}{r} \cdot \frac{r}{{}^{1}\!B} + \frac{{}^{2}\!A \cdot {}^{2}\!B}{r^2} \cdot \frac{r^2}{{}^{2}\!B} + + \right)$$

$=$

Digitized by Google

$= \frac{1}{A\,B} \cdot \left( {}^{1}B + {}^{2}B + + {}^{x}B \right)$ oder

$= \frac{1}{A\,B} \cdot \left( {}^{1}A + {}^{2}A + + {}^{x}A \right)$ wo $x$ die Altersergänzung der älteſten verbundenen Perſon iſt. *Soll* in jedem Fall, *das Verhältniſs der Lebenswahrſcheinlichkeit für die jüngſte Perſon den Beytrag beſtimmen*, alſo im erſten Ausdruck B, im letztern A zur älteſten Perſon gehören, ſo iſt der obige Ausdruck jedesmal *die mittlere Lebensdauer der älteſten Perſon, dividirt durch die Anfangszahl, die zur jüngſten gehört.* Es ſey die Frau die jüngſte, und der erſte vorauszuzahlende Beytrag $\beta = \frac{N}{B}$, der im nächſten Jahr alſo $\frac{r.\,N}{{}^{1}B}$, u. ſ. f. ſo bekommt man $\frac{N}{B} + \frac{N.\,E\,\overline{a}}{B} = E$, wo $E\,\overline{a}$ die mittlere Lebensdauer des Mannes iſt. Folglich $N = \frac{B.\,E}{1 + E\,\overline{a}}$, und der erſte Beytrag iſt $\frac{N}{B}$, welcher in dieſem Fall eine kleine Gröſse wird.

*Zuſatz* 6. Soll der Beytrag im Anfang ganz voraus bezahlet werden, dann mit jedem Jahr um $\frac{1}{x}$tel abnehmen, $x$ für die Altersergänzung der jüngſten Perſon genommen, ſo ſuche man den Werth *einer nach der Ordnung der natürlichen Zahlen ſteigenden Verbindungsrente.* (nach §. 148. 149.) Dieſen mit $x$ dividirt, und von der ſimplen Verbindungsrente abgezogen, gebe den Reſt R, ſo iſt der *anfängliche Beytrag* $\beta = \frac{1}{R+1}$.

Und

Digitized by Google

Und ſoll der Beytrag jedes Jahr um $\frac{1}{x}$tel *gröſſer werden*, ſo nehme man *die Summe der ſimpeln und der ſteigenden Verbindungsrente*; dieſe ſey S, ſo iſt $\beta = \frac{E}{S+1}$. Andere Fälle übergehe ich.

## 3.

*Aufgabe* 2. *Den Werth einer Wittwenrente zu finden, die nach gewiſſen Jahren* (n) *von der Zeit des Ankaufs an gerechnet, erſt fällig wird.*

*Auflöſung.*

1) Man ſuche eine auf *n* Jahre *aufgeſchobene Leibrente* für das Alter der Frau, (nach §. 83. *Einleit.* Cap. 2.)

2) Eben ſo eine auf *n* Jahre *aufgeſchobene Eherente* (nach §. 148. *Einleit.* Cap. 3.). So giebt

3) die letztere von der erſten abgezogen den baaren Werth der geſuchten Rente.

*Beweis.* Der Beweis erhellet faſt unmittelbar aus der Formel für die Wittwenrente $\frac{(A - {}^{1}A)}{A} \cdot \frac{{}^{1}B}{Br^{1}} + +$ $\frac{(A - {}^{n}A)\,{}^{n}B}{A\,B\,r^{n}} + \frac{(A - {}^{n+1}A)\,{}^{n+1}B}{A\,B.\,r^{n+1}} + +$. Von dieſen Hebungen fallen alle erſten weg, bis $\frac{(A - {}^{n}A).{}^{n}B}{A\,B\,r^{n}}$, dieſe eingeſchloſſen, wenn *n* die Zahl der Jahre iſt, um welche die Rente aufgeſchoben werden ſoll. Es iſt



Digitized by Google

nämlich A die Anfangszahl für das Alter der Männer *a*, und B für das Alter *b* der Frauen. Daher bleiben nur die Glieder $\frac{\left(A - \overline{\overline{A}}^{n+1}\right) \cdot \overline{\overline{B}}^{n+1}}{A\,B\,r^{n+1}} + +$ übrig. Diese sind

$$= \left(\frac{\overline{\overline{B}}^{n+1}}{B\,r^{n+1}} + +\right) - \left(\frac{\overline{\overline{A}}^{n+1} \cdot \overline{\overline{B}}^{n+1}}{A\,B\,r^{n+1}} + +\right),$$ wovon jenes die *n* Jahre aufgeschobene Leibrente für die Frau ist, dieses die *n* Jahre aufgeschobene Verbindungsrente. Also

$$= \frac{\overline{\overline{B}}^{n}}{B} \cdot \frac{\lambda \overline{b+n}}{r^n} - \frac{\overline{\overline{A}}^{n} \cdot \overline{\overline{B}}^{n}}{A\,B\,r^n} \lambda \overline{\overline{b+n} \cdot \overline{a+n}}.$$

*Ex.* Das Alter des Mannes *a* sey 35, der Frauen ihres *b*, 30 Jahr, und $n = 15$ Jahren, so ist, nach dem Zinsenfuss 4 von hundert gerechnet, die auf 15 Jahre aufgeschobene Leibrente der Frauen $\frac{58,04}{135,35} \cdot 12,0108 = 5,1504$, und die auf 15 Jahre aufgeschobene Eherente $= 2,5847$ (§. 2.)

Folglich die *gesuchte Wittwenrente* $= 2,5657$

Die *volle Wittwenrente* ist $= 3,7594$

---

*Unterschied* 1,1937

Für dasselbe Alter ist die auf 10 Jahr aufgeschobene Leibrente der Frau, $= \frac{77,90}{135,35} \cdot 13,1565 = 7,5721$, und die 10 Jahr aufgeschobene Eherente ist $\frac{330}{409} \cdot \frac{77,90}{135,35} \cdot 9,7091 = 4,4329$. Daher *die 10 Jahr*

10 *Jahr nach dem Ankauf aufgeſchobene Wittwenrente* = 3, 0392.

Die Zeit des Aufſchubs ſey 5 Jahre, ſo iſt der Werth, 10,8111 — 7, 2632 = 3, 5479.

*Zuſatz.* Daraus läſst ſich auch der Werth der Wittwenrente berechnen, wenn ſie die Bedingung hat, daſs im *erſten* Jahr nach dem Einſatz, falls die Penſion fällig wird durch den Tod des Mannes, nur $\frac{1}{n}$ tel, im *zweyten*, $\frac{2}{n}$ tel, und ſo ferner für jedes Jahr $\frac{1}{n}$ tel mehr ausgezahlet werde, bis ſie nach *n* Jahren voll wird, und dann ſo bleibet. Stirbt der Mann im zweyten Jahr, ſo fängt die Hebung mit $\frac{2}{n}$ tel an, und ſo ferner mit $\frac{3}{n}$ tel, wenn ſie im dritten Jahr fällig wird. Unter dieſen Bedingungen iſt das erſte $\frac{1}{n}$ tel eine *volle* Wittwenpenſion; das zweyte $\frac{1}{n}$ tel iſt eine auf 1 Jahr *aufgeſchobene*, und ſo weiter. Das letzte hinzukommende $\frac{1}{n}$ tel iſt eine auf n — 1 Jahre aufgeſchobene. Der geſuchte Werth beſteht in der Summe dieſer einzelnen aufgeſchobenen Wittwenpenſionen.

## 5.

*Aufgabe 3. Den baaren Werth einer Wittwenrente zu finden, wenn dieſe gewiſſe Jahre* (n) *nach dem Tode des Ehemannes erſt fällig wird, in welchem Jahre nach dem Einſatz dieſer auch ſterbe.* Das iſt den Werth einer *nach dem Tode des Mannes aufgeſchobenen Wittwenrente* zu finden. Dieſe kann ſchlechthin eine *aufgeſchobene Wittwenrente* heiſsen.

*Auflöſung.*

1) Man ſuche aus den Tabellen die Wittwenrenten für das gegebene Alter des Mannes $a$, und für das Alter der Frau, welches $n$ Jahre gröſser iſt, als das gegebene (b), das iſt, für das Alter der Frau $b+n$.

2) Man vermindere dieſen Werth in dem Verhältniſs der Zahl der Lebenden im Alter $b+n$, zu der Zahl derſelben im Alter $b$.

3) Dieſs letztgefundene diſcontire man auf $n$ Jahre zurück, ſo erhält man den geſuchten Werth.

Der Werth der Wittwenrente, wenn die Frau $b+n$ Jahre, der Mann $a$ Jahre alt iſt, iſt $\lambda\overline{b+n} - \lambda\overline{a.(b+n)}$. Der geſuchte Werth der $n$ Jahre nach dem Tode des Mannes erſt fälligen Rente iſt

$$\frac{{}^{n}B}{B} \cdot \frac{A}{r^n}\left(\lambda\overline{b+n} - \lambda\overline{a.(b+n)}\right).$$

*Beweis.* Der Werth der Wittwenrente für das Alter des Mannes $a$, und der Frau $b$, iſt

$$= \frac{\Delta A}{A} \cdot \lambda\overline{b} + \frac{\Delta\,{}^{1}A}{A} \cdot \frac{{}^{1}B}{B} \frac{\lambda\overline{b+1}}{r} +$$

$$\frac{\Delta\,{}^{2}A}{A} \cdot \frac{{}^{2}B}{B} \cdot \frac{\lambda\overline{b+2}}{r^2} + + \frac{\Delta\,{}^{x}A}{A} \frac{{}^{x}B}{B} \frac{\lambda\overline{b+x}}{r^x} \cdot$$

Man ſehe Cap. IV. der *Einleit.* §. 189.

Dieſer Ausdruck (er ſey E) giebt für jedes Jahr die Leibrenten, welche an die entſtandenen Wittwen zu zahlen ſind, um ſie auf einmal abzukaufen, da ſie ſonſt jährliche

jährliche Hebungen empfangen ſollten. Weil nun aber jede neue Wittwe ſtatt einer *vollen* Leibrente nur eine *aufgeſchobene* haben ſoll, ſo kommt der geſuchte Werth (er ſey Q) heraus, wenn in dem obigen Ausdruck für E ſtatt der *vollen* Renten lauter *aufgeſchobene* auf *n* Jahre, geſetzet werden.

Eigentlich verhält es ſich ſo. Es iſt

$$\frac{\Delta A}{A}\lambda\overline{b} = \frac{\Delta A}{A}\cdot\frac{{}^{1}\overline{B}}{B}\frac{(1+\lambda\overline{b+1})}{r}\cdot \quad (\S.\ 189.$$

*Einleit.*) Hier iſt $\frac{\Delta A}{A}\cdot\frac{{}^{1}\overline{B}}{B}$ die Zahl der *entſtehenden Wittwen*, denen, um ſie auf einmal abzufinden, die erſte Hebung 1 und dann für die übrigen die Leibrente $\lambda\overline{b+1}$ auszuzahlen iſt. Eben ſo iſt es in den übrigen Gliedern der Formel. Nach der angenommenen Bedingung ſollen ſie die erſte Hebung nicht haben, und für die folgende bloſs eine auf noch $n-1$ Jahre aufgeſchobene Leibrente. Der Tod des Mannes wird, wie gewöhnlich, auf den Anfang des Sterbejahrs geſetzet, an deſſen Ende die Hebung erfolget. Daher am Ende des Sterbejahrs Ein Jahr verfloſſen iſt, und noch $n-1$ mehr vergehen ſollen, ehe die Penſion fällig wird.

Nun iſt aber $\frac{{}^{1}\overline{B}}{Br}\overline{{}^{-(n-1)}\lambda\overline{b+1}} = {}^{-n}\overline{\lambda\overline{b}}$, das iſt, gleich einer auf $n-1$ Jahr aufgeſchobenen Leibrente für das Alter $b+1$, mit $\frac{{}^{1}\overline{B}}{Br}$ multiplicirt, oder gleich



Digitized by Google

einer auf $n$ Jahre aufgeschobenen Leibrente für das Alter $b$.

Denn $\overset{-n}{\lambda}\overline{b} = \frac{\overset{n+1}{B}}{Br^{n+1}} + + \frac{\overset{x}{B}}{Br^{x}}$, und

$$\frac{\overset{1}{B}}{Br} \cdot \overset{-(n-1)}{\lambda}\overline{b+1} = \frac{\overset{1}{B}}{Br} \cdot \left( \frac{\overset{n+1}{B}}{\overset{1}{B}r^{n}} + + \frac{\overset{x}{B}}{\overset{1}{B}r^{x-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{B} \cdot \left( \frac{\overset{n+1}{B}}{r^{n+1}} + + \frac{\overset{x}{B}}{r^{x}} \right).$$

Auf dieselbe Art werden auch die übrigen Theile in dem Werthe der *vollen* Wittwenrente verändert, und es kommen in dem obigen Ausdruck überall statt der vollen Leibrenten die auf $n$ Jahre aufgeschobene **Leibrenten.**

Also wird der gesuchte Werth

$$Q = \frac{\Delta A}{A} \cdot \overset{-n}{\lambda}\overline{b} + \frac{\Delta \overset{1}{A}}{A} \cdot \frac{\overset{1}{B}}{B} \cdot \frac{\overset{-n}{\lambda}\overline{b+1}}{r}$$

$$+ \frac{\Delta \overset{2}{A}}{A} \cdot \frac{\overset{2}{B}}{B} \cdot \frac{\overset{-n}{\lambda}\overline{b+2}}{r^{2}} + + \frac{\Delta \overset{x}{A}}{A} \cdot \frac{\overset{x}{B}}{B} \cdot \frac{\overset{-n}{\lambda}\overline{b+x}}{r^{x}}.$$

Setzet man in diesem Ausdruck überall die Werthe der aufgeschobenen Leibrenten (nach §. 83. der *Einleit.*) so wird

$$Q = \frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overset{n}{B}}{B} \cdot \frac{\lambda\overline{b+n}}{r^{n}} + \frac{\Delta \overset{1}{A}}{A} \cdot \frac{\overset{1}{B}}{B} \cdot \frac{\overset{n+1}{B}}{\overset{1}{B}} \cdot \frac{\lambda\overline{b+1+n}}{r^{1+n}}$$

$$+ \frac{\Delta \overset{2}{A}}{A} \cdot \frac{\overset{2}{B}}{B} \cdot \frac{\overset{n+2}{B}}{\overset{2}{B}} \cdot \frac{\lambda.\overline{b+2+n}}{r^{2+n}} + +$$

$$\frac{\Delta \overset{x}{A}}{A} \cdot \frac{\overset{x}{B}}{B} \cdot \frac{\overset{n+x}{B}}{\overset{x}{B}} \cdot \frac{\lambda\overline{b+x+n}}{r^{n+x}}.$$

Wenn

Digitized by Google

Wenn alle Glieder mit $\frac{{}^{n}B}{{}_{n}B}$ multiplicirt werden, ſo erhält man

$$Q = \frac{{}^{n}B}{Br^{n}} \cdot \left( \frac{\Delta\, {}^{0}A}{A} \cdot \lambda \overline{b+n} + \frac{\Delta\, {}^{1}A}{A} \cdot \frac{{}^{n+1}B}{{}_{n}Br^{1}} \lambda \overline{b+1+n} \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta\, {}^{2}A}{A} \cdot \frac{{}^{n+2}B}{{}_{n}Br^{2}} \cdot \lambda \overline{b+2+n} + + \frac{\Delta\, {}^{x}A}{A} \cdot \frac{{}^{n+x}B}{{}_{n}Br^{x}} \cdot \lambda \overline{b+x+n} \right)$$

$$\text{Aber } \frac{\Delta\, {}^{0}A}{A} \lambda \overline{b+n} + \frac{\Delta\, {}^{1}A}{A} \cdot \frac{{}^{n+1}B}{{}_{n}Br} \lambda \overline{b+1+n} + +$$

iſt der baare Werth einer Wittwenrente, wenn das Alter des Mannes *a*, der Frauen $b+n$ iſt $= \lambda \overline{b+n} - \lambda \overline{a.(b+n)}$ (§. 189. *Einleit.*).

Folglich $Q = \frac{{}^{n}B}{B.r^{n}} \cdot (\lambda \overline{b+n} - \lambda \overline{a\,(b+n)})$.

*Ex.* Das Alter des Mannes ſey 35, und der Frauen 30 Jahr, die Wittwenrente ſoll 10 Jahr nach dem erfolgten Tode des Mannes erſt laufend werden, ſo iſt der Werth für die Wittwenrente, wenn der Mann 35, die Frau 40 Jahre hat, oder $\lambda \overline{40} - \lambda \overline{35.40} = 2,7843$.

Auch $\frac{{}^{n}B}{B} \cdot \frac{1}{r^{n}} = \frac{374}{439} \cdot 0,67556$, wenn nämlich $r = 1,04$. Folglich

$$Q = 2,7843 \cdot \frac{374}{439} \cdot 0,67556 = 1,5593.$$



Digitized by Google

Die *volle* Wittwenrente für daſſelbe Alter der Eheleute iſt 3,7594. *Jene iſt weniger als der dritte Theil von dieſer.*

*Ex.* Für daſſelbe Alter der Eheleute ſoll die Wittwenrente *fünf* Jahr nach des Mannes Tode laufend werden; ſo iſt $\lambda\overline{35} - \lambda\overline{35.35} = 3,2599$, und $\frac{409}{439} \cdot 0,8219 \cdot 3,2599 = 2,4352$, das iſt nahe $\frac{2}{3}$tel *der vollen Rente.*

## 6.

*Aufgabe.* 4. *Den Werth einer bedingt fälligen Wittwenrente zu finden*, das iſt einer ſolchen, die nur unter der Bedingung fällig wird, daſs der Mann ein beſtimmtes Alter erreiche, oder gewiſſe Jahre nach dem Ankauf der Rente noch lebe.

*Auflöſung.*

1) Statt der Eherente für das gegebene Alter der Perſonen, nehme man eine andere für ein Paar, das ſo viel Jahre älter iſt, als der Mann, um die Rente fällig zu machen, nach dem Ankauf der Rente noch leben ſoll.

2) Dieſe Wittwenrente werde zurück diſcontirt auf die gegebene Jahre, und dann vermindert in dem Verhältniſs der Zahl der ſtehenden Ehen nach ſo viel Jahren zu der Zahl der anfänglichen Ehen, ſo hat man den geſuchten Werth

$$Q = \frac{{}^{n}A \; {}^{n}B}{A.\,B.\,r^{n}} \cdot \left(\lambda\overline{b+n} - \lambda\overline{\overline{a+n.\;b+n.}}\right).$$

*Beweis.*

Digitized by Google

*Beweis.* Nach den Bedingungen bekommen diejenigen Wittwen gar nichts, deren Männer nicht *n* Jahre nach dem Ankauf gelebet haben. Folglich empfangen auch von allen nach dem *n*ten Jahre aus einer anfänglichen Zahl gleicher Ehen entſtandenen Wittwen nur diejenigen die Penſion, deren Männer nach dem *n*ten Jahre geſtorben ſind.

Die vorhandenen Wittwen im $n+1$ ten Jahre ſind $\frac{A-\overset{n+1}{-}A}{A}\cdot\frac{\overset{n+1}{-}B}{B}$, und der jetzige Werth ihrer alsdenn fälligen Hebung iſt $\frac{(A-\overset{n+1}{-}A)}{A}\cdot\frac{\overset{n+1}{-}B}{B.r^{n+1}}$. Für das folgende Jahr iſt ſolcher $=\frac{(A-\overset{n+2}{-}A).\overset{n+2}{-}B}{A.\ B.r^{n+2}}$, und für das unbeſtimmte Jahr $n+x$, $=\frac{(A-\overset{n+x}{-}A).\overset{n+x}{-}B}{A.\ B.r^{n+x}}$.

Das Verhältniſs der hebungsfähigen Wittwen zu der Zahl aller, iſt $\overset{n}{-}A-\overset{n+1}{-}A:A-\overset{n+1}{-}A$ im n+1ten Jahr, in n+2ten $\overset{n}{-}A-\overset{n+2}{-}A:A-\overset{n+2}{-}A$, und im $n+x$ten, $\overset{n}{-}A-\overset{n+x}{-}A:A-\overset{n+x}{-}A$.

Daher ſind die Werthe der wirklich zahlbaren Hebungen $\frac{(\overset{n}{-}A-\overset{n+1}{-}A).\overset{n+1}{-}B}{A.\ B.r^{n+1}}$



Digitized by Google

$$+\frac{(\overline{\overline{A}}^{n}-\overline{\overline{A}}^{n+2}).\overline{\overline{B}}^{n+2}}{A.B.r^{n+2}}++\frac{(\overline{\overline{A}}^{n}-\overline{\overline{A}}^{n+x}).\overline{\overline{B}}^{n+x}}{A.B.r^{n+x}}$$

$$=\frac{\overline{\overline{A}}^{n}}{A}\cdot\left(\frac{\overline{\overline{B}}^{n+1}}{B.r^{n+1}}+\frac{\overline{\overline{B}}^{n+2}}{B.r^{n+2}}++\frac{\overline{\overline{B}}^{n+x}}{B.r^{n+x}}\right)-$$

$$\left(\frac{\overline{\overline{A}}^{n+1}.\overline{\overline{B}}^{n+1}}{A.B.r^{n+1}}+\frac{\overline{\overline{A}}^{n+2}.\overline{\overline{B}}^{n+2}}{A.B.r^{n+2}}++\frac{\overline{\overline{A}}^{n+x}.\overline{\overline{B}}^{n+x}}{A.B.r^{n+x}}\right).$$

Der erſte Theil iſt $\frac{\overline{\overline{A}}^{n}}{A}\,\frac{\overline{\overline{B}}^{n}}{Br^{n}}\cdot\lambda\overline{b+n}$;

der zweyte $=\frac{\overline{\overline{A}}^{n}\,\overline{\overline{B}}^{n}}{A.B.r^{n}}\,\lambda\overline{(a+n).(b+n)}$.

Denn $\frac{\overline{\overline{B}}^{n+1}}{B.r^{n+1}}+\frac{\overline{\overline{B}}^{n+2}}{B.r^{n+2}}++$ iſt eine $n$ Jahre aufgeſchobene Leibrente für das Alter $b$, $=\frac{\overline{\overline{B}}^{n}}{B.r^{n}}\,\lambda\overline{b+n}$,

und $\frac{\overline{\overline{A}}^{n+1}.\overline{\overline{B}}^{n+1}}{AB.r^{n+1}}+\frac{\overline{\overline{A}}^{n+2}.\overline{\overline{B}}^{n+2}}{AB.r^{n+2}}++$ iſt eine $n$ Jahre aufgeſchobene Verbindungsrente,

$=\frac{\overline{\overline{A}}^{n}.\overline{\overline{B}}^{n}}{AB.r^{n}}\cdot\lambda\overline{(a+n).(b+n)}$. (*Einl.* §. 83. und 143.)

Alſo iſt der geſuchte Werth

$$=\frac{\overline{\overline{A}}^{n}.\overline{\overline{B}}^{n}}{A.Br^{n}}\;(\lambda\overline{b+n}-\lambda\overline{(a+n).(b+n)}).$$

## 7.

*Zuſatz.* Man kann auch ſo verfahren. Es wird eine $n$ Jahre *aufgeſchobene Leibrente für die Frau* geſucht,

geſucht, und eine dergleichen *Eherente.* Die erſte wird in dem Verhältniſs $\frac{{}^{n}\!A}{A}$ vermindert, und dann von ihr die letztere abgezogen, ſo iſt der Reſt der geſuchte Werth.

Weil auch $\frac{{}^{n}\!B}{B\,r^{n}}\,\lambda\overline{b+n} - \frac{{}^{n}\!A.\,{}^{n}\!B}{A\,B.\,r^{n}}\cdot\lambda\overline{(a+n)\,(b+n)}$ eine auf $n$ Jahre aufgeſchobene Eherente iſt, nach *Aufg.* 1. §. 3. ſo ziehe man davon ab $\frac{(A-{}^{n}\!A)}{A}\cdot\frac{{}^{n}\!B}{B\,r^{n}}\cdot\lambda\overline{b+n}$ oder die aufgeſchobene Leibrente für $b$, durch $\frac{A-{}^{n}\!A}{A}$ multiplicirt, ſo erhält man $\frac{{}^{n}\!A\;{}^{n}\!B}{A.\,B.\,r^{n}}(\lambda\overline{b+n} - \lambda\overline{(a+n).\,(b+n)})$, oder den hier geſuchten Werth. Alſo von der auf $n$ Jahre nach dem Ankauf aufgeſchobenen Wittwenrente, die auf $n$ Jahre aufgeſchobene Leibrente in die Wahrſcheinlichkeit, daſs der Mann in $n$ Jahren geſtorben ſey, multiplicirt, abgezogen, giebt den geſuchten Werth.

## 8.

Der Satz kann auch auf dieſe Art bewieſen werden. Daſs die Hebung für ein unbeſtimmtes auf das $n$te folgendes Jahr wirklich werde fällig werden, hängt ab, 1) davon, daſs die Frau noch lebe; 2) daſs der Mann nach dem Einkauf noch $n$ Jahre lebe, und 3) daſs der letztere

letztere aus denen im $n$ten Jahr Lebenden abgegangen sey. Die erste Wahrscheinlichkeit ist $\frac{\overline{\overline{B}}^{n+x}}{B}$, die zweyte $\frac{\overline{A}^{n}}{A}$, die dritte $\frac{\overline{A}^{n} - \overline{\overline{A}}^{n+x}}{\overline{A}^{n}}$. Daraus wird die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{\overline{A}^{n}}{A} \cdot \frac{(\overline{A}^{n} - \overline{\overline{A}}^{n+x})}{\overline{A}^{n}} \cdot \frac{\overline{\overline{B}}^{n+x}}{B}$ $= \frac{(\overline{A}^{n} - \overline{\overline{A}}^{n+x})}{A} \cdot \frac{\overline{\overline{B}}^{n+x}}{B}$. Dieser letzte Ausdruck enthält die *zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass die Frau noch lebe, der Mann aber nach dem nten Jahr gestorben sey.*

Man würde unrecht schliessen, wenn man diese Wahrscheinlichkeit der Hebung auf das Jahr $n+x$ ausdrucken wollte durch $\frac{\overline{A}^{n}}{A} \cdot \frac{(A - \overline{\overline{A}}^{n+x})}{A} \frac{\overline{\overline{B}}^{n+x}}{B}$. Es kann doch so richtig scheinen. Die wirkliche Zahlung wird erfolgen, wenn 1) die Frau lebet, davon ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{\overline{\overline{B}}^{n+x}}{B}$, und 2) wenn der Mann todt ist, davon ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{A - \overline{\overline{A}}^{n+x}}{A}$, 3) wenn der Mann noch $n$ Jahre nach dem Ankauf lebet, davon ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{\overline{A}^{n}}{A}$. Also müsse die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit seyn $\frac{\overline{A}^{n}}{A} \cdot \frac{(A - \overline{\overline{A}}^{n+x})}{A} \frac{\overline{\overline{B}}^{n+x}}{B}$. Allein dies würde ein Verstoss

Verſtoſs ſeyn gegen die richtige Art Wahrſcheinlichkeiten zuſammenzuſetzen. (Siehe *Einleit.* Cap. IV. §. 172.) Es muſs vielmehr ſo geſchloſſen werden. Geſetzt es ſey die Wahrſcheinlichkeit, daſs der Mann noch $n$ Jahre leben werde, das iſt $\frac{{}^{n}A}{A}$ Gewiſsheit, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs er todt ſey, gewiſs nicht $\frac{A-{}^{n+x}A}{A}$, ſondern $\frac{{}^{n}A-{}^{n+x}A}{{}^{n}A}$, nämlich die Wahrſcheinlichkeit, daſs A aus denen, die nach $n$ Jahren noch leben, nämlich aus ${}^{n}A$, geſtorben ſey. Folglich muſs mit $\frac{{}^{n}A}{A}$, auch $\frac{{}^{n}A-{}^{n+x}A}{{}^{n}A}$ zuſammengeſetzet werden. Noch dieſs. Wenn die Wahrſcheinlichkeit, daſs der Mann todt ſey $\frac{A-{}^{n+x}A}{A}$, Gewiſsheit iſt, ſo iſt die zwote Wahrſcheinlichkeit, daſs er $n$ Jahre gelebet habe, gewiſs nicht $\frac{{}^{n}A}{A}$, ſondern $\frac{{}^{n}A-{}^{n+x}A}{A-{}^{n+x}A}$. Folglich müſste $\frac{A-{}^{n+x}A}{A}$ mit $\frac{{}^{n}A-{}^{n+x}A}{A-{}^{n+x}A}$ zuſammengeſetzt werden. Das giebt denn wiederum denſelbigen Ausdruck. Ich habe in dem obigen Beweiſe geſucht die Sache von ihrer einleuchtendſten Seite vorzuſtellen.

9. *Exem-*

Digitized by Google

## 9.

*Exempel* 1. Es ſey das Alter des Mannes 35, und der Frau 30 Jahr. Die Zeit, die der Mann nach dem Ankauf der Rente noch leben ſoll, oder $n$, 5 Jahr, ſo iſt der Werth der Wittwenrente für ein Ehepaar von 40, und 35 Jahren, 4 Procent gerechnet, 3,7453. Dieſe multiplicirt durch $\frac{374}{409}$, das iſt, mit dem Verhältniſs der Zahl der Lebenden vom Alter 40, zu denen vom Alter 35; und dann nochmals durch $\frac{\overline{35}B}{\overline{30}B\,r^5}$, oder durch das Verhältniſs der diſcontirten Zahlen der Lebenden im Jahr 35, zu denen im Jahr 30, das iſt durch $\frac{103,65}{135,35}$ (aus der *Tabelle* in §. 36. der *Einleitung*) multiplicirt, giebt $\frac{374}{409} \cdot \frac{103,65}{135,35} \cdot 3,7453 = 2,6225$.

Die volle Wittwenrente für das angenommene Ehepaar iſt 3,7594. Der Unterſchied alſo 1,1369, welches ein erheblicher Unterſchied iſt.

*Ex.* 2. Daſſelbige Ehepaar genommen, und die Zeit, die der Mann noch leben ſoll, auf 10 Jahre geſetzet, ſo iſt der geſuchte Werth

$$= \frac{\overline{45}A}{\overline{35}A} \cdot \frac{\overline{40}B}{\overline{30}B\,r^{10}} \left(\lambda\overline{40} - \lambda\overline{40.45.}\right) = 1,8147.$$

*Ex.*

*Ex.* 3. Daſſelbe Ehepaar beybehalten, aber die Zeit, die der Mann noch leben ſoll, ſey 15 Jahr, ſo iſt der geſuchte Werth

$$= \frac{{}^{50}A.\,{}^{45}B}{{}^{35}A.\,{}^{30}B.\,r^{15}} \cdot (\lambda\overline{45} - \lambda\overline{50.45})$$

$$= \frac{300}{409} \cdot \frac{58,04}{135,35} \cdot 3,7933 = 1,1931.$$

*Ex.* 4. Es ſoll $\frac{1}{3}$tel der Penſion fällig werden, wenn der Mann 5 Jahre nach dem Einſatz gelebet hat; noch $\frac{1}{3}$tel mehr, wenn es 10 Jahre, und die ganze Penſion, wenn es 15 Jahre ſind, ſo iſt der baare Werth, das Alter, wie vorher, genommen

$$\frac{2,6225 + 1,8147 + 1,1931}{3} = 1,8734.$$

## 10.

*Anmerkung.* Vergleicht man die Werthe der letzten, an gewiſſe Lebensjahre des Mannes gebundenen Renten, die, ob ſie überall fällig werden oder nicht, von dem Leben des Mannes auf gewiſſe Jahre abhangen, mit den Werthen der *aufgeſchobenen Wittwenrenten* in §. 8. Aufg. 3, welche fällig werden, wenn der Mann ſtirbt vor der Frau, nur erſt ſo viele Jahre nach dem Tode des Mannes, ſo findet man die letzten kleiner. In den meiſten Fällen wird ein Ehemann alſo mehr Grund haben, die letztern zu kaufen, als die erſtern. Die Wittwe genieſſet zwar alsdenn die nächſten *n* Jahre nach des Mannes Tode die

Hebung

Digitized by Google

Hebung nicht. Bis dahin kann sie die meisten male, des Nachlasses des Mannes wegen, sie noch entbehren; aber nachher geniesst sie solche sicher auf die übrige Lebenszeit. Bey den andern hingegen geniesst sie solche zwar gleich nach des Mannes Tode, aber sie muss vorher das Risico tragen, ob sie überall zur Hebung komme?

Es lässt sich die Bedingung machen, dass wenn der Mann im ersten Jahr nach dem Einsatz stirbt, die jährliche Pension nur sey — — $\frac{1}{10}$tel,
Stirbt er im zweyten — — $\frac{2}{10}$tel,
— — dritten — — $\frac{3}{10}$tel,
und so weiter, dass er durch jedes Jahr für die Wittwe $\frac{1}{10}$tel mehr gewinnt, bis nach 9 vollendeten Jahren die Pension ganz fällig wird. Diess sind *bedingt fällige steigende Wittwenrenten.* Allein weil die Wahrscheinlichkeit, dass der Mann in den nächsten Jahren sterben werde, nur gering ist, so wird der Unterschied in den Werthen der Renten so erheblich auch nicht, dass man nicht lieber diese Differenz für die volle Sicherheit noch zugeben werde.

## II.

*Anmerkung.* Bey der Auflösung dieser Aufgaben kommen die *aufgeschobenen Leibrenten* sehr häufig vor. Wie solche jedesmal durch eine Division, aus einer vorher einzurichtenden Hülfstabelle, wie die §. 56. der *Einleit.* Cap. 2. von Leibrenten ist, zu finden sind, ist §. 85. *der Einleit.* gezeiget.

Auf

Digitized by Google

Auf eine ähnliche Art kann man ſich eine Hülfstafel für *aufgeſchobene Verbindungs- oder Eherenten* machen. Sie braucht folgende Columnen:

| I. | II. | III. | IV. |
|---|---|---|---|
| *Alter der Frau und des Mannes.* | *Producte aus den Zahlen der Lebenden im Alter des Mannes, multiplicirt mit den diſcontirten Zahlen der Lebenden im Alter der Frau.* | *Werthe der zugehörigen Eherenten.* | *Producte der Zahlen der Columne II. und III. in einander.* |

Iſt ſo eine Tabelle eingerichtet, ſo nehme man aus der vierten Columne das Product, was zu der Verbindungsrente zwoer Perſonen gehöret von einem Alter, welches ihr gegebenes um die Jahre des Aufſchubs übertrifft; und dieſs dividire man durch das Product aus der zwoten Columne, welches zu dem gegebenen Alter der Perſonen ſelbſt gehört. So viel als man Eherenten in den Fällen hat, ſo viel bekommt man alsdenn auch Werthe aufgeſchobener Eherenten, mittelſt Einer Diviſion.

Das Verfahren erhellet hieraus. Es iſt die *n Jahre aufgeſchobene Verbindungsrente* $= \frac{{}^{n}A.{}^{n}B}{A.B.r^{n}} . \lambda\overline{(a+n)(b+n)}$ $= \frac{{}^{n}A}{A} . \frac{{}^{n}B : r^{b+n}}{B : r^{b}} . \lambda\overline{(a+n)(b+n)}$. Die Columne II. enthält die Producte ${}^{n}A.{}^{n}B : r^{b+n}$, bey dem Jahr



Digitized by Google

$a+n$ mit $b+n$, und auch die Producte $A.B : r^b$ für das Alter $a$ und $b$, und die Columne IV. die Producte aus den erſten Producten, ${}^{n}A.{}^{n}B : r^{b+n}$, in die Werthe der Verbindungsrenten $\lambda\overline{(a+n)(b+n)}$.

## 12.

*Aufgabe 5. Den Werth der Wittwenrente zu finden, die nur fällig wird unter der Bedingung, daſs der Mann ein gewiſſes Alter erreiche, und wenn ſie fällig wird, erſt nach einer gegebenen Zahl von Jahren nach dem Einſatz fällig wird.*

*Auflöſung.* Es ſey das Alter des Mannes beym Einſatz $a$, und das welches er erreichen ſoll, um die Rente fällig zu machen, $a+m$. Das Alter der Frau beym Einſatz $b$. Ferner die Zeit, welche nach dem Einſatz verfloſſen ſeyn muſs, ehe die Hebung erfolgt, $n$. Die Zahl $n$ muſs gröſser ſeyn als $m$.

1) Man ſuche eine auf $n$ Jahre nach dem Ankauf aufgeſchobene Wittwenrente (nach §. 3. *Aufg.* 2.)

2) Die auf eben ſo viele Jahre aufgeſchobene *Leibrente* der Frau, vermindert in dem Verhältniſs der nach $m$ Jahren geſtorbenen zu der anfänglichen Zahl der Lebenden, das iſt, mit $\frac{A-{}^{m}A}{A}$ ſie multiplicirt, ziehe man von der gefundenen Wittwenrente ab, ſo iſt der Reſt das Geſuchte.

*Beweis.*

Digitized by Google

*Beweis.* Die erſte Zahlung der Rente geſchieht im $n+1$ ten Jahr, folglich ſind die Werthe der Zahlungen an alle Wittwen $\frac{(A - {}^{n+1}A)}{A} \cdot \frac{{}^{n+1}B}{B.r^{n+1}} \cdot + +$. Allein weil nun in jedem Termin nur diejenigen Wittwen etwas erhalten, deren Männer $m$ Jahre nach dem Einſatz gelebet haben, ſo ſind die Werthe der wirklich zu zahlenden Penſionen

$$= \frac{{}^{m}A - {}^{n+1}A}{(A - {}^{n+1}A)} \cdot \frac{(A - {}^{n+1}A)}{A} \cdot \frac{{}^{n+1}B}{B.r^{n+1}} + +$$

$$= \frac{({}^{m}A - {}^{n+1}A)}{A} \cdot \frac{{}^{n+1}B}{B.r^{n+1}} \cdot + +$$

$$= \frac{{}^{m}A}{A} \cdot \frac{{}^{n+1}B}{B.r^{n+1}} - \frac{{}^{n+1}A}{A} \cdot \frac{{}^{n+1}B}{B.r^{n+1}} + +$$

$$= \frac{{}^{n+1}B}{B.r^{n+1}} - \frac{{}^{n+1}A.\,{}^{n+1}B}{A.B.r^{n+1}} - \frac{(A - {}^{m}A)}{A} \cdot \frac{{}^{n+1}B}{B.r^{n+1}}$$

$$= {}^{-n}\lambda\,\overline{b} - {}^{-n}\lambda\,\overline{ab} - \frac{(A - {}^{m}A)}{A} \cdot {}^{-n}\lambda\,\overline{b}.$$

*Ex.* Es ſey wiederum das Alter des Mannes 35, der Frau 30 Jahr, und $n = 5$ Jahr, ſo iſt die *aufgeſchobene Eherente* $= 2,5847$. Die *aufgeſchobene Leibrente der Frau* 5,1504. §. 3.

Nun iſt $\frac{A - {}^{m}A}{A} = 1 - \frac{374}{409} = \frac{35}{409} =$ 0,0856, und 5,1504. 0,0856 $=$ 0,4409. Alſo 2,5657 — 0,4409 $=$ 2,1248. Der Unterſchied dieſer



Digitized by Google

Rente von der blofs aufgeſchobenen Wittwenrente iſt nur geringe.

*Ex.* 2. Es ſey m = 10 Jahre, das übrige wie vorher, ſo iſt das von der aufgeſchobenen Wittwenrente abzuziehende Stück $\frac{70}{409} \cdot 5,1504 = 0,8815$. Daher der geſuchte Werth, $2,5657 - 0,8815 = 1,6842$.

*Ex.* 3. Iſt auch m = 15 Jahre, ſo iſt

$\frac{A - {}^{m}A}{A} = \frac{109}{409}$, und $\frac{109}{409} \cdot 5,1504 = 1,3726$,

und $2,5657 - 1,3726 = 1,1931$, wie im §. 9. nach der 4ten Aufgabe. Denn in dieſem Fall, wo der Mann 15 Jahre leben ſoll, um die Rente fällig zu machen, verſteht ſichs von ſelbſt, daſs ſie nicht eher als 15 Jahre nach dem Einſatz fällig wird, und die zwote Bedingung iſt ein vergeblicher Zuſatz.

## 13.

*Aufgabe* 6. *Den Werth einer bedingt fälligen und aufgeſchobenen Wittwenrente zu finden, das iſt, einer ſolchen, die nur fällig wird unter der Bedingung, daſs der Mann nach dem Ankauf noch gewiſſe Jahre (m) lebe, und dann nur fällig wird, gewiſſe Jahre (n) nach des Mannes Tode.*

*Auflöſung.*

1) Man ſuche nach *Aufgabe* 3. §. 5. den Werth der Wittwenrente, die erſt *n* Jahre nach des Mannes Tode

Tode fällig wird für ein Ehepaar, welches *m* Jahre älter iſt als das gegebene.

2) Dieſen gefundenen Werth multiplicire man durch $\frac{{}^{m}\!A.\,{}^{m}\!B}{A.B.r^{m}}$, ſo hat man das geſuchte, oder in einer Formel es ausgedruckt

$$Q = \frac{{}^{m}\!A}{A} \cdot \frac{{}^{m}\!B}{Br^{m}} \cdot \frac{{}^{n+m}\!B}{{}^{m}\!Br^{n}} \left(\lambda \overline{b+m+n} - \lambda(\overline{a+mb})(\overline{+m+n})\right)$$

$$= \frac{{}^{m}\!A}{A} \cdot \frac{{}^{n+m}\!B}{Br^{n+m}} \cdot \left(\lambda \overline{b+m+n} - \lambda \overline{(a+m)(b+m+n)}\right).$$

*Beweis.* Weil die Wittwenrente erſt *n* Jahre fällig wird nach des Mannes Tode, zu welcher Zeit dieſer auch erfolge, ſo iſt ihr Werth, wenn die zwote Bedingung nicht hinzukommt, $= \frac{{}^{n}\!B}{B.r^{n}} \cdot \left(\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{{}^{n}\!B}{{}^{n}\!B} \cdot \lambda \overline{b+n} +\right.$

$$\frac{\Delta {}^{1}\!A}{A} \cdot \frac{{}^{n+1}\!B}{{}^{n}\!B} \cdot \frac{\lambda \overline{b+n+1}}{r} + +$$

$$\left.\frac{\Delta {}^{m}\!A.\ {}^{n+m}\!B}{A.\ {}^{n}\!B} \left(\frac{\lambda \overline{b+n+m}}{r^{m}} \cdot \ + +\right)\right) \text{ §. 5.}$$

In dieſem Ausdruck enthält jedes Glied ein Product der in dem Jahr (im Anfang nämlich) entſtandenen Wittwen in den baaren Werth ihrer Rente. Weil nun aber der Mann *m* Jahre muſs gelebet haben, falls die Wittwe zur Penſion kommen ſoll, ſo empfangen die in den

erſten $m$ Jahren entſtehenden Wittwen nichts. Wenn der Mann aber $m$ Jahre gelebt hat, und im Anfang des $m+1$ ten abgeht, ſo kommen die alsdenn entſtehenden Wittwen zur Hebung, empfangen aber nur aufgeſchobene Wittwenrenten. Daher wird der hier geſuchte Werth

$$= \frac{\overline{\overline{n}}B}{Br^n} \cdot \left( \frac{\Delta \overline{\overline{m}}A}{A} \cdot \frac{\overline{\overline{n+m}}B}{\overline{\overline{n}}B r^m} \lambda \overline{b+n+m} \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta \overline{\overline{m+1}}A. \overline{\overline{n+m+1}}B}{A. \overline{\overline{n}}B. r^{m+1}} \lambda \overline{b+n+m+1} + + \right)$$

$$= \frac{\overline{\overline{m}}A}{A} \cdot \frac{\overline{\overline{n+m}}B}{Br^{m+n}} \cdot \left( \frac{\Delta \overline{\overline{m}}A. \overline{\overline{n+m}}B}{\overline{\overline{m}}A. \overline{\overline{n+m}}B} \lambda \overline{b+n+m} \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta \overline{\overline{m+1}}A}{\overline{\overline{m}}A} \cdot \frac{\overline{\overline{n+m+1}}B}{\overline{\overline{n+m}}B. r} \cdot \lambda \overline{b+n+m+1} + + \right) ..$$

Der letzte Factor iſt der Werth einer Wittwenrente für ein Ehepaar, davon der Mann $a+m$, die Frau $b+n+m$ alt iſt, (nach §. 189. *Einleitung*) $= \lambda \overline{b+n+m} - \lambda \overline{a+m}. \overline{b+n+m}$, und

$$\frac{\overline{\overline{n+m}}B}{\overline{\overline{m}}B. r^n} (\lambda \overline{b+n+m} - \overline{\lambda a+m}. \overline{b+n+m})$$

iſt der Werth der $n$ Jahre nach des Mannes Tode fälligen Wittwenrente für ein Paar, wo der Mann $a+m$ und die Frau $b+m$ Jahr alt iſt. §. 5. Dieſer Werth multiplicirt durch

durch $\frac{\overline{\overline{A}}^{m}}{A} \cdot \frac{\overline{\overline{B}}^{m}}{Br^{m}}$ giebt das geſuchte

$$\frac{\overline{\overline{A}}^{m}}{A} \cdot \frac{\overline{\overline{B}}^{n+m}}{B.\, r^{m+n}} (\lambda \overline{b+n+m} - \lambda \overline{a+m} \,.\, \overline{b+m+n}).$$

## 14.

*Zuſatz.* 1) Wenn $m = o$ iſt, ſo iſt $\overline{\overline{A}}^{m} = A$ und $\overline{\overline{B}}^{n+m} = \overline{\overline{B}}^{n}$. Alſo dieſer Werth dem gleich in §. 5.

2) Wenn $n = o$, ſo iſt $\overline{\overline{B}}^{n+m} = \overline{\overline{B}}^{m}$, und der geſuchte Werth $\frac{\overline{\overline{A}}^{m}}{A} \cdot \frac{\overline{\overline{B}}^{m}}{Br^{m}} (\lambda \overline{b+m} - \lambda \overline{a+m}. \overline{b+m})$, das iſt der Werth, der gleich nach des Mannes Tode fällig iſt, unter der Bedingung, daſs dieſer *m* Jahre gelebet habe, (nach *Aufgabe* 5. §. 12.).

## 15.

*Ex.* 1. Wenn das Alter des Mannes 35, der Frau 30 iſt, und die Rente ſoll jedesmal erſt 5 Jahre nach des Mannes Tode fällig ſeyn, ſo iſt der Werth derſelben 2,4352. (§. 5.). Kommt nun die Bedingung hinzu, daſs der Mann 5 Jahre nach dem Einkauf leben muſs, wenn ſie überall fällig werden ſoll, ſo iſt ihr Werth

$$= \frac{374}{409} \cdot \frac{409}{439} \cdot \frac{1}{r^{5}} \cdot 2,4352.$$

$$= \frac{374}{439} \cdot 0,8219.\, 2,4352 = 1,7051.$$



Digitized by Google

Soll bey denſelben Bedingungen die Rente 10 Jahr nach des Mannes Tode erſt zahlbar werden, ſo iſt ihr Werth $= \frac{374}{439} \cdot 0{,}8219 \cdot 1{,}5593 \cdot (\S.\,5.) = 1{,}0918.$

## 16.

*Anmerkung* 1. Die bisherigen Aufgaben enthalten die vornehmſten Umſtände, auf die bey *allgemeinen Verſorgungsanſtalten* Rückſicht genommen werden muſs. Man ſieht, daſs *aufgeſchobene Wittwenrenten*, die erſt einige Jahre nach des Verſorgers Tode fällig werden, wohlfeiler ſeyn können, und in den berechneten Beyſpielen es wirklich ſind, als die *bedingt fälligen*, die von dem Leben des Mannes auf ſo viele Jahre abhangen. Bedarf die Wittwe in den erſten 10 Jahren nach des Mannes Tode noch keiner Verſorgung, ſo koſtet die 10 Jahr nachher fällige Rente für ſie, bey dem Alter in den obigen Exempeln, nur etwas mehr als anderthalbmal die jährliche Hebung; kann die Wittwe nur fünf Jahre warten, und darf der Mann es auf ſeine Geſundheit wagen, die Rente an die Bedingung zu binden, daſs er ſelbſt noch 5 Jahre lebe, ſo iſt der Werth nur 1,7 der jährlichen Hebung. Sie wird gar nur 1,09 wenn die Wittwe 10 Jahre warten und der Mann 5 Jahre ſelbſt noch leben ſoll.

Und daſs in den meiſten Fällen, wenn nicht in allen, es ſo ſeyn werde, *daſs* nämlich *die n Jahre nach dem Tode*

Digitized by Google

*Tode des Mannes aufgeſchobene Rente wohlfeiler ſey, als die, welche n Lebensjahre des Mannes erfordert*, um fällig zu werden, läſst ſich aus den allgemeinen Ausdrücken von beyden überſehen, wenn man die Tabelle XXVII. von den Wittwenrenten damit zuſammenhält. Die erſte, die *aufgeſchobene* iſt, $\frac{{}^{n}B}{Br^{n}}(\lambda\overline{b+n} - \lambda\overline{a(b+n)})$. §. 5.

$= \frac{{}^{n}B}{Br^{n}} \cdot E.\overline{a(b+n)}$, wo $E.\overline{a(b+n)}$ die Gröſse des baaren Einſatzes für eine volle Wittwenrente iſt, wenn das Alter des Mannes a, und der Frauen ihres $b+n$ iſt. Die zwote, die *bedingt fällige*, iſt

$\frac{{}^{n}A}{A} \cdot \frac{{}^{n}B}{Br^{n}}(\lambda\overline{b+n} - \lambda\overline{a+n.\ b+n})$. §. 6.

$= \frac{{}^{n}A}{A} \cdot \frac{{}^{n}B}{Br^{n}} \cdot E(\overline{a+n}).\ \overline{(b+n)}$.

Nun nehmen die Einſätze, oder die baaren Werthe der Wittwenrenten, wenn das Alter des Ehemanns daſſelbe bleibet, der Frauen ihres aber gröſser wird, das iſt, die Werthe $\lambda\overline{b+n} - \lambda\overline{a.\ b+n}$ in ſtärkerm Verhältniſſe ab, als $\frac{{}^{n}A}{A}$, wogegen die Einſätze, wenn beyde Eheleute gleich viel älter ſind, das iſt $\lambda\overline{b+n} - \lambda\overline{a+n.\ b+n}$, anfangs zunehmen, hernach erſt wieder abnehmen. Daher die meiſtenmale der Einſatz für den erſten Fall kleiner ſeyn muſs als in dem letzten.

## 17.

Bey *dieſen Renten-Werthen kommt aber die Abweichung der Sterblichkeit in ausgeſuchten Geſellſchaften in Betracht.* Nimmt man einmal an, was anzunehmen die Erfahrungen bey der Calenbergiſchen Geſellſchaft berechtigen, (Abh. *von der Sterblichkeit in ausgeſuchten Geſellſchaften* §. 67.) daſs die nach den Tabellen berechneten *vollen* Wittwenrenten als richtig bey Wittwencaſſen beybehalten werden können, weil der Vortheil aus der mindern Sterblichkeit der Männer, und der Nachtheil aus der noch geringern Sterblichkeit der Frauen ſich einander nahe aufheben, ſo ſind die Werthe der *aufgeſchobenen*, und auch *der bedingt fälligen Wittwenrenten* nach den gemeinen Tabellen berechnet, zu klein. Laſs die $n$ Jahre aufgeſchobene oder nach des Mannes Tode erſt fällige Rente §. 5. $\frac{{}^{n}B}{Br^{n}} \cdot E(a.\overline{b+n})$ für die ausgeſuchte Geſellſchaft bezeichnet werden durch $\frac{{}^{n}B'}{Br^{n}} . E'a.\overline{b+n}$. Wird nun angenommen $E.\overline{a.b+n} = E'.\overline{a.b+n}$, ſo iſt (nach §. 51. der *angeführten Abhandlung*) ${}^{n}B' - {}^{n}B = v\,{}^{n}B\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B}\right)$ wenn $v$ die Gröſse iſt, die von dem Unterſchied der Sterblichkeit abhängt, und *poſitiv*, wo die Sterblichkeit geringer iſt als die tabellariſche. Daraus entſteht ein Unterſchied $v\frac{{}^{n}B}{B}\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B}\right) \cdot \frac{E(a.\overline{b+n})}{Br^{n}}$ in den Werthen dieſer

dieſer Renten nach der *wirklichen Sterblichkeit* und *nach den Tabellen*, der hier immer *poſitiv* iſt. Die Caſſe wird alſo zu kurz kommen, wenn hierauf keine Rükſicht genommen wird.

Bey den *bedingt fälligen* Renten, die von gewiſſen Lebensjahren des Mannes abhangen, $\frac{{}^{n}A.\,{}^{n}B}{A\,B.\,r^{n}} \cdot E(\overline{b+n} \cdot \overline{a+n})$ iſt der Werth abhängig von beyden Verhältniſſen $\frac{{}^{n}A}{A}$ und $\frac{{}^{n}B}{B}$. Hier iſt alſo der Unterſchied noch gröſser.

Indeſſen wenn die Zahl der Jahre $n$ nicht groſs iſt und alſo $1 - \frac{{}^{n}B}{B}$ ein kleiner Bruch, ſo wird, weil $v = 0{,}4$, (§. 47. *angef. Abh.*) der Unterſchied bey der erſten Art von Renten $0{,}4 \cdot \frac{{}^{n}B}{B}\left(1 - \frac{{}^{n}B}{B}\right) \cdot \frac{Ea.(\overline{b+n})}{r^{n}}$ nicht ſehr erheblich ſeyn.

## 18.

Das Riſico der Caſſe iſt bey der erſten Art von Renten, die $n$ Jahre nach des Mannes Tode fällig werden auch kleiner, als bey denen, die an die Bedingung, daſs der Mann noch $n$ Jahre lebe, gebunden ſind. Der zu erwartende Verluſt nämlich nach ſeinem Maximo berechnet. Denn ſonſt iſt der an ſich mögliche Verluſt gröſser bey der erſten Claſſe. Dieſs erhellet aus §. 23. der *Abhandl. über das Riſico.*

Soll

Soll nämlich die Rente erſt *n* Jahre nach des Mannes Tode fällig werden, ſo iſt die gröſste mögliche Ausgabe, welche die Caſſe haben kann, eine Zeitrente auf das Alter einer Perſon, welche *n* Jahre älter iſt, als die Frau, auf *n* Jahre zurück diſcontirt. Von dieſer diſcontirten Zeitrente den Einſatz abgezogen, giebt den gröſsten möglichen Verluſt. Weil nun auch der ganze Einſatz gewonnen werden kann, ſo iſt jene Zeitrente die Summe des Gewinns und des Verluſtes.

Eine gleiche Zeitrente iſt auch die Summe des *möglichen Verluſtes* und des *möglichen Gewinns* bey der an *n* Lebensjahre des Mannes gebundenen Rente.

Der an ſich *mögliche Verluſt* der Caſſe iſt bey den erſten *aufgeſchobenen Wittwenrenten* gröſser, und der an ſich *mögliche Gewinn* kleiner, als bey den bedingt fälligen der zwoten Art. Daher die Differenz des gröſsten möglichen Verluſtes und Gewinns bey jenen auch gröſser iſt, als bey dieſen. Dadurch wird das gröſste zu erwartende Riſico vermindert. (angef. Stelle).

Es empfehlen ſich alſo auch von dieſer Seite die *aufgeſchobenen vor den bedingt fälligen.* Jene müſſen alſo bey einer Verſorgungsanſtalt nicht fehlen, die allgemein ſeyn ſoll. Wählt man eine aus aufgeſchobenen und bedingtfälligen zuſammengeſetzte Art, wie die in der 6ten Aufgabe §. 13., ſo hat man die wohlfeilſten an ſich, und zugleich ſolche, wobey man den Nachtheilen entgeht, die

Digitized by Google

die aus dem Einſchleichen ungeſunder Ehemänner für die Geſellſchaft entſpringen. Denn dieſs iſt ein Vorzug derer, die nur unter der Bedingung fällig werden, daſs der Mann nach dem Einſatz noch einige Jahre leben ſoll, und dieſs empfiehlt ſie recht ſehr. Um die Ungewiſsheit, die dabey Statt findet, nicht weiter als nöthig iſt, zu verlängern, darf man nur etwan zwey oder drey, höchſtens vier als Probejahre bedingen, die der Mann noch leben ſoll. Und auf die Abweichung der Sterblichkeit in ausgeſuchten Geſellſchaften kann leicht in den Tabellen die erforderliche Rückſicht genommen werden.

---

Zuſatz

Digitized by Google

# Zuſatz

## zur dritten und vierten Abhandlung.

## *Von der Wahrſcheinlichkeit der gröſsten Erwartung.*

### I.

### *Anmerkung über die Wahrſcheinlichkeit des berechneten Riſico der Caſſe.*

Das in der dritten Abhandlung berechnete gröſste Riſico der Caſſe iſt nicht der gröſste mögliche Verluſt oder Gewinn, ſondern ein gröſster Mittel- oder Durchſchnitts-Verluſt, die gröſste *Erwartung*. Daher iſt es auch nicht *gewiſs*, ſondern nur *wahrſcheinlich*, daſs der *wirkliche* Erfolg nicht noch mehr Verluſt oder Gewinn bringen werde, als dieſs Riſico beträgt, das iſt, als ſich, alles aufs gröſste berechnet, *erwarten* läſst. Die Frage, wie groſs dieſe letztere Wahrſcheinlichkeit ſey, iſt hier alſo auch erheblich.

Da die Coëfficienten eines Binomii $(a+b)^m$, oder die Theile des Binomii $(1+1)^m$, die Zahl der Fälle ausdrucken, in denen die Caſſe für alle $m$ Renten, zu zahlen bekommt 1, 2, 3 u. ſ. f., wo der Werth der Einheit ſo groſs iſt, als die Summe *des gröſsten möglichen Gewinns und Verluſtes bey einer einzelnen Rente*, die in dem Vorhergehenden durch die Linie AB (Fig. 2.) vorgeſtellt

geſtellt iſt; ſo druckt das Verhältniſs eines einzelnen Coëfficienten zu der Zahl aller überhaupt möglichen Fälle, $2^m$; die Wahrſcheinlichkeit aus, daſs der *wirkliche Werth* der *m* Renten gerade ein ſolcher ſeyn werde, als der Exponent der Potenz von *b* in dem angenommenen Coëfficienten des Binomii $(a+b)^m$ angiebt. Z. B. $\frac{1}{2^m}$ iſt die Wahrſcheinlichkeit daſs *gar nichts* zu zahlen ſey, oder der gröſste an ſich mögliche Gewinn Statt finde. Eben ſo groſs iſt *die Wahrſcheinlichkeit für den gröſsten möglichen Verluſt*, oder daſs die Caſſe m. AB für *m* Renten zu zahlen haben werde.

Der *Durchſchnitts-Coëfficient*, das iſt der *mittlere*, wo der gröſste mögliche Gewinn und der gröſste mögliche Verluſt bey den einzelnen Renten als gleich groſs und alſo beyde auch als gleich wahrſcheinlich genommen werden, ſey M, ſo iſt $\frac{M}{2^m}$, $= \frac{0,8}{m^{\frac{1}{2}}}$ (§. 32.) *die Wahrſcheinlichkeit, daſs weder etwas gewonnen, noch verloren werde*, oder daſs die Summe aller Zahlungen der Caſſe gerade ſo groſs ſey, als ſie an Mittelwerthen eingenommen hat, nämlich $\frac{1}{2}$ m. AB = m. AM.

Ferner die *Wahrſcheinlichkeit daſs entweder Ausgabe und Einnahme gerade gegen einander aufgehen oder doch gewonnen werde*,

iſt $= \frac{\frac{1}{2}\cdot(2^m + M)}{2^m} = \frac{0,8}{2m^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}$. Denn es iſt klar, daſs die Summe der Fälle, in denen gewonnen wird,

wird, es sey viel oder wenig, und derer, in denen es aufgeht, so grofs sey, als die Summe aller Coëfficienten vom Anfang an, bis an den Mittlern und diesen letztern dazu gerechnet.

Eben so grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs es *entweder ganz aufgehen oder verloren werde.*

Nimmt man von den Coëfficienten die erstern bis auf den mittlern, diesen eingeschlossen, das ist, die Summe $\frac{2^m + M}{2}$, und dazu noch die auf M folgende nächsten *n*, deren Summe $=$ S sey, so ist das Verhältnifs $\frac{2^m + M}{2} + S : 2^m$ *die Wahrscheinlichkeit, dafs entweder gewonnen oder doch der Verlust nicht gröfser als n mal A B seyn werde.*

Und wenn die Summe der übrigen Coëfficienten, die auf jene folgen, T heifst, so ist die *Wahrscheinlichkeit, dafs noch mehr als n.* A B *verloren werde,* $= \frac{T}{2^m}$.

Daher die Wahrscheinlichkeit, dafs *der wirkliche Verlust nicht über n. AB, das ist, über die gröfste Erwartung hinausgehen werde, zu der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils, wie* $\frac{2^m + M}{2} + S$ zu T.

## 2.

Es läfst sich von diesem *Verhältnifs eine Grenze* angeben, *unter der es nicht seyn kann,* auf folgende Art.

Die

Die auf M folgende $n$ Glieder in der Coëfficienten-Reihe, deren Summe S iſt, heiſsen N, O, u. ſ. f., und es ſey $\frac{1}{2}\,m = q$, ſo iſt nach den bekannten Geſetzen des Binomii $N = \frac{q}{q+1} \cdot M$,

$$O = \frac{q-1}{q+2} \cdot N = M\left(\frac{q}{q+1} \cdot \frac{q-1}{q+2} \cdot\right)$$

und wenn P das letzte von den $n$ Gliedern iſt, die auf M folgen, ſo iſt $P = \left(\frac{q}{q+1} \cdot \frac{q-1}{q+2} \cdots \frac{q-n+1}{q+n}\right) M$.

Nun iſt $\frac{q}{q+1} > \frac{q-1}{q+2}$, und ferner ſind die folgenden Verhältniſſe, worinn die Glieder abnehmen, immer kleiner. Das letzte $\frac{q-n+1}{q+n} = h$ iſt das kleinſte von ihnen.

Daraus iſt klar, daſs wenn ſtatt S, oder der Summe der Glieder von M bis P, beyde dieſe eingeſchloſſen, die Summe einer geometriſchen Reihe von eben ſo vielen Theilen, nämlich $n+1$, geſuchet wird, wo das erſte Glied der Reihe M, und das letzte M. $h^n$ iſt, ſo bekommt man eine Summe $M+S'$, die kleiner iſt als $M+S$, weil $S'$ kleiner als S iſt. Es iſt aber jene Summe $M+S' = M.\left(\frac{1-h^{n+1}}{1-h}\right)$.

Unter den folgenden Coëfficienten von dem $(n+1)$ten nach dem mittlern an, dieſen mit gerechnet, deren Anzahl $= q - n$, und deren Summe T iſt, ſey der

erste Q, der nächstfolgende R, so ist $R = \frac{q-n-1}{q+n+2} \cdot Q$. Und die Verhältnisse, in denen jeder folgende in Hinsicht auf den nächst vorhergehenden stehet, werden immer kleiner, das ist, die folgenden Coëfficienten nehmen in einem immer grösern Verhältnifs ab. Es ist also klar, dafs wenn man eine geometrische Reihe berechnet, deren erstes Glied Q, und der Exponent $= \frac{q-n-1}{q+n+2} = t$ ist, welche $q-n = k$ Glieder habe, so bekommt man eine Summe, die sicher gröfser ist, als die Summe des Coëfficienten Q, und der auf Q folgenden. Die Summe jener geometrischen Reihe ist $= Q\left(\frac{1-t^k}{1-t}\right)$ und diese ist gröfser als T.

Weil $Q = M\left(\frac{q}{q+1} \cdot \frac{q-1}{q+2} \cdot \ldots \cdot \frac{q-n}{q+n+1}\right)$ so ist Q sicher kleiner als $M. \left(\frac{q}{q+1}\right)^n \cdot h$. Dafür schreibe man der Kürze wegen $p^n . hM$. Demnach ist auch $M. p^n . h\left(\frac{1-t^k}{1-t}\right) = T'$ gröfser als T.

Daraus folgt, dafs $\frac{2^m+M+2S}{2T} > \frac{2^m+M+2S'}{2T'}$.

Dieses letztere Verhältnifs als richtig angenommen, so ist das *Verhältnifs der Wahrscheinlichkeit, dafs der wirkliche Verlust nicht über n* AB *gehen werde*, zu der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils, dafs er nämlich noch gröfser

Digitized by Google

gröſser ausfalle, gröſser, als

$$\frac{2^m+M}{2} + S' : T' = \frac{2^m-M}{2} + M + S' : T'$$

$$= \frac{2^m-M}{2} + M\left(\frac{1-h^{n+1}}{1-h}\right) : M.\, p^n.\, h.\left(\frac{1-t^k}{1-t}\right)$$

und weil $2^m = \frac{m^{\frac{1}{2}}.M}{0,8}$ (§. 32.), ſo bekommt man das Verhältniſs

$$\left(m^{\frac{1}{2}} + 1,6.\left(\frac{1-h^{n+1}}{1-h}\right) - 0,8\right) : 1,6.p^n h\left(\frac{1-t^k}{1-t}\right),$$

oder weil 0, 8 in dem Zähler unerheblich iſt,

$$\frac{m^{\frac{1}{2}}.\overline{1-h.} + 1,6.(1-h^{n+1})}{1,6.\ p^n.\ h. \qquad (1-t^k).(1-h) : \overline{1-t}.}$$

Dieſs Verhältniſs wird durch die gegebene Zahlen *m* und *n* beſtimmt.

Die beyden Gröſsen *h* und *t* ſind ſehr wenig verſchieden, wofern nicht *n* dem $\frac{1}{2}$m ganz nahe kommt und dann *n* ſelbſt nicht gar groſs iſt. Sonſt kann man immer h = t ſetzen. Dieſs giebt denn kürzer den Ausdruck

$$\frac{m^{\frac{1}{2}}(1-h) + 1,6\,(1-h^{n+1})}{1,6.\ p^n.\ h\,(1-h^k)}.$$

## 3.

Wenn $h, = \frac{q-n+1}{q+n}$, ein Bruch iſt, der nicht zu nahe der Einheit kommt, das iſt, wenn *n* ein erhebliches Verhältniſs zu *q*, oder $\frac{1}{2}$m hat, und auch *m* eine ziemlich gröſse Zahl iſt, ſo kann ſowohl $h^{n+1}$ als $h^k$

als nichts angesehen werden. Da hat man dann noch kürzer das Verhältniss $\frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot \overline{1-h}}{1,6.\ p^n.\ h}$. Hier kommt nämlich auch im Zähler der Theil 1,6 nicht in Betracht.

Da $p = \frac{q}{q+1}$ oder wenn $q+1 = r$, $= \frac{r-1}{r}$ ist, so ist $p^n = \left(\frac{r-1}{r}\right)^n$, welches, wenn $r$ eine grosse Zahl ist, $= e^{-\frac{n}{r}}$, oder als die zum negativen natürlichen Logarithmus $\left(-\frac{n}{r}\right)$ gehörige Zahl angesehen werden kann. Diese Zahl wird aufs höchste, weil $n$ nicht gröser als $\frac{1}{2}\,m = q$ seyn kann, $\frac{1}{e} = \frac{1}{2,1718}$.

Wenn das Verhältniss von $n$ zu $m$ noch dasselbe bleibet, und also auch $h$ nicht merklich sich ändert, obgleich die Zahl $m$ verschieden ist in verschiednen Fällen, so wird jenes *Verhältniss der Wahrscheinlichkeit, dass der wirkliche Verlust innerhalb der gröfsten Erwartung bleibe, zu der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils* in solchen verschiednen Fällen, wie $m^{\frac{1}{2}} : 1$ seyn, das ist, *wird in gleichem Verhältniss sich ändern, wie das gröfste Risico des Verlustes.*

Ist $n = \frac{1}{4}\,m = \frac{1}{2}\,q$, so wird $h = \frac{q - \frac{1}{2}q}{q + \frac{1}{2}q} = \frac{1}{3}$. Also $1 - h = \frac{2}{3}$, und das Verhältniss ist sehr nahe $\frac{2}{3}\,m^{\frac{1}{2}} : \frac{1}{3}.\ 1,6. = 2.\ m^{\frac{1}{2}} : 1,6.$

4. Allein

4.

Allein wenn *n* in Vergleichung mit *m* eine ſo kleine Zahl iſt, daſs *h* der Einheit ſehr nahe kommt, ſo muſs in dem obigen Ausdruck des Verhältniſſes oder vielmehr des Exponenten deſſelben $\frac{m^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-h} + 1,6(1-h^{n+1})}{1,6 \cdot p^n \cdot h \cdot (1-h^k)}$ der Factor $1-h^{n+1}$ nicht für $= 1$ noch für $= 0$ angenommen werden.

Dieſs kommt vor in der Aufgabe, die hier die intereſſanteſte iſt, nämlich *wie viel es wahrſcheinlicher ſey, daſs entweder gewonnen werde, oder doch der wirkliche Verluſt der Caſſe innerhalb des berechneten gröſsten Rifico ſtehen bleibe, zu der Wahrſcheinlichkeit des Gegentheils?*

In dieſem Fall iſt $n = 0,2 \cdot m^{\frac{1}{2}}$.

Alſo $h = \frac{q-n+1}{q+n} = \frac{\frac{1}{2}m-n+1}{\frac{1}{2}m+n} = \frac{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}}-0,2}{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}}+0,2}$ weil $\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}$ im Zähler unerheblich iſt, wenn *m* eine groſse Zahl iſt. Aber alsdenn kommt auch *h* der Einheit ſehr nahe.

Bey dieſen Vorausſetzungen bekommt man $1-h = \frac{0,4}{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}}+0,2}$. Folglich wird $m^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-h} = 0,8$ ganz nahe.

Ferner wenn für $\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}} + o, 2$ geschrieben wird r, so wird $h = \frac{r - o, 4}{r}$, und $\left(\frac{r - o, 4}{r}\right)^{n+1} = e^{-\frac{o,4\,(n+1)}{r}}$, weil nämlich r oder $\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}}$ eine so grofse Zahl ist, dafs $\frac{o, 4}{r}$ als unerheblich in Vergleichung mit der Einheit weggelassen werden kann. Das giebt denn

$h^{n+1} = e^{-\frac{o,4\,(m^{\frac{1}{2}}+1)}{\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}} + o,2}} = e^{-o,8}$ ganz nahe.

Folglich $1 - h^{n+1} = 1 - \frac{1}{e^{o,8}} = \frac{e^{o,8} - 1}{e^{o,8}}$

$= \frac{1,225541}{2,225541}$, das ist nahe $\frac{1}{2}$. Daraus wird

$1,6\,(1 - h^{n+1}) = o, 8$; und also der ganze Zähler

$m^{\frac{1}{2}} \cdot \overline{1 - n} . + 1, 6 . \overline{1 - h^{n+1}} = o, 8 + o, 8 = 1, 6.$

Im Nenner ist $p^n = \left(\frac{\frac{1}{2} m}{\frac{1}{2} m + 1}\right)^{m^{\frac{1}{2}}} = e^{-2 : m^{\frac{1}{2}}}$

oder die Zahl, der der negative Logarithmus naturalis $\frac{2}{m^{\frac{1}{2}}}$ zugehört. Weil aber $\frac{2}{m^{\frac{1}{2}}}$ ein sehr kleiner Bruch ist, so wird $p^n$ so wenig von der Einheit abweichen, dafs man $p^n = 1$ setzen kann.

Die Zahl $h^k = \left(\frac{r - o, 4}{r}\right)^k$ ist $= e^{-o,4 . k : r}$.

Aber $\frac{k}{r} = \frac{\frac{1}{2} m - m^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}} + o,2} = m^{\frac{1}{2}}$ ganz nahe; also

$h^k$

$h^k = e^{-0,4.m^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e^{0,4.m^{\frac{1}{2}}}}$, was für $= 0$ anzuſehen iſt.

Es wird alſo in dieſem Fall der Nenner des Verhältniſſes 1, 6. $p^n.(1-h^k) = 1,6$; und das Verhältniſs ſelbſt 1, 6 : 1, 6, das iſt Gleichheit.

Es iſt dieſs nur eine Grenze, bis ſo klein aber das Verhältniſs der beyden Wahrſcheinlichkeiten nicht werden kann; allein man ſieht doch, daſs es der Gleichheit ſich nähert. Das heiſst mit andern Worten, *je gröſser die Zahl der Renten m iſt, deſto kleiner wird die Wahrſcheinlichkeit, daſs der wirkliche Erfolg über die gröſste Erwartung nicht hinaus gehe, in Vergleichung mit dem entgegengeſetzten Fall, daſs dieſs geſchehe.* Jene iſt aber doch allemal gröſser, wie ſowohl aus dem obigen Ausdruck des Verhältniſſes als aus der Natur der Sache unmittelbar einleuchtet.

In dieſen Fällen, wo *n* in Vergleichung mit *m* eine kleine Zahl iſt, kommt zwar noch in Betracht, daſs die Summe der Coëfficienten von dem (n+1)ten nach dem Mittelgliede an bis zu Ende, deren Anzahl $\frac{1}{2}m - n$ iſt, und welche die möglichen Fälle angiebt, in denen der Verluſt über das gröſste Riſico hinausgeht, viel zu groſs herauskomme, wenn ſie auf die obige Art, nämlich als die Summe einer geometriſchen Reihe, deren Exponent $t^{\frac{1}{2}m}$ iſt, berechnet wird. Die erſtern hieher gehöri-

Digitized by Google

gehörigen Coëfficienten nehmen nur ab in einem Verhältnifs, das nahe so grofs ist als h. Man kann fortgehen bis zum $(2n+1)$ten nach dem mittlern; wo das Verhältnifs des nächstfolgenden zu dem nächstvorhergehenden noch nicht gröfser als

$$\frac{q-2n-1}{q+2n+1} = \frac{\frac{1}{2}m - 2m^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{2}m + 2m^{\frac{1}{2}} + 1} = \frac{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}} - 2}{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}} + 2 + \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}},$$

das ist noch unmerklich kleiner als $h = \frac{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}} - 0,2}{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}} + 0,2}$ ist.

Hingegen nehmen die folgenden Coëfficienten, deren Anzahl die gröfste ist, nämlich

$$\tfrac{1}{2}m - 2n = \tfrac{1}{2}m - 2m^{\frac{1}{2}}$$

immer stärker ab, so dafs bey den beyden letzten das Verhältnifs $\frac{1}{m}$ wird. Aber dieſs ändert doch das Grenzverhältnifs nicht merklich. Denn wenn man auch, um die Grenze noch näher zu ziehen, die Reihe der letzten Coëfficienten von dem $(n+1)$ten nach dem mittlern an, in zwey Stücke theilen will, davon die erstern $n$ Glieder zu dem einen, die übrigen, an der Zahl $\frac{1}{2}m - 2n$, zu dem zweyten gebracht werden, so kommt noch nahe dasselbe Resultat heraus. Die Summe des ersten Theils ist alsdenn $M.p^n h\left(\frac{1-h^{n+1}}{1-h}\right)$, und des zweyten $M.p^n.h^{n+2}.\left(\frac{1-v^{q-2n}}{1-v}\right)$. Und nun mag $v$ so klein wie man will, so gar $= 0$ angenom-

angenommen werden, ſo iſt doch dieſer letztere Theil wenigſtens $= M\,p^n.\,h^{n+2}$. Alſo beyde zuſammen, $M.\,p^n.\,h.\left(\frac{1-h^{n+1}}{1-h}+h^{n+1}\right)$. Der Exponent des Verhältniſſes wird folglich

$$\frac{m^{\frac{1}{2}}+1,6.\left(\frac{1-h^{n+1}}{1-h}\right)-0,8}{1,6.\,p^n.\,h\left(\frac{1-h^{n+1}}{1-h}+h^{n+1}\right)}, \text{ oder}$$

$$\frac{m^{\frac{1}{2}}.\overline{1-h}.+1,6\,(1-h^{n+1})}{1,6.\,p^n.\,h\,(1-h^{n+2})}, \text{ welches wiederum ſehr}$$

nahe $\frac{0,8+0.8}{1,6.\frac{1}{2}} = 2:1$ iſt.

Bey dieſer Art zu rechnen ſind aber die letzten Coëfficienten, die auf den $(2n+1)$ten nach dem mittlern folgen, ganz weggeworfen, weil man $v=0$ genommen hat.

Dieſs giebt eine *zwote Grenze*, für den Fall nämlich, wo *m* eine ſo groſse Zahl iſt, daſs auch noch $m^{\frac{1}{2}}$ groſs iſt. Es iſt *die Wahrſcheinlichkeit, daſs der wirkliche Verluſt das Riſico nicht überſteigen werde, kleiner als die Wahrſcheinlichkeit des Gegentheils*, zweymal genommen.

Es ſey $m=576$. So iſt $m^{\frac{1}{2}}=24$, und $n=0,4.\,m^{\frac{1}{2}}=9,6$. Dann wird, (genau gerechnet was mittelſt der Logarithmen leicht iſt) $h=0,938$ und $h^{n+1}=0,5074$. Aber $h^k$ iſt ganz unbeträchtlich.



Digitized by Google

Dieſs giebt den Exponenten des Verhältniſſes

$$\frac{m^{\frac{1}{2}}(1-h)+1,6\,(1-h^{n+1})}{1,\ 6.\ p^n.\ h} = 1,\ 55.$$

Alſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs der wirkliche Verluſt innerhalb den Grenzen des Riſico bleiben werde, zur Wahrſcheinlichkeit des Gegentheils gröſser als $1\frac{1}{2} : 1. = 3 : 2.$

Es iſt auch für ſich klar, unter den angenommenen Vorausſetzungen, daſs die Wahrſcheinlichkeit *nicht mehr zu gewinnen*, als die gröſste Erwartung geht, zu der Wahrſcheinlichkeit *mehr zu gewinnen*, in demſelben Verhältniſse ſey, nämlich gröſser als 3 : 2.

Iſt $m$ eine mäſsig groſse Zahl als 25, $m^{\frac{1}{2}}$ alſo 5, und $n = 0, 2. 5 = 1$, ſo bekommt man $h = 0, 92$, und $t$, welches in dieſem Fall nicht für gleich groſs mit $h$ genommen werden darf, $= 0, 68$; auch $p = 0, 92$, ſo groſs in dieſem Fall wie $h$, und $h^{n+1} = h^2 = 0,8464$. Aber $t^k = \left(\frac{21}{31}\right)^{11\frac{1}{2}}$ ganz unerheblich, und $1 - t^k = 1$. Nun die Rechnung nach dem obigen Ausdruck des Verhältniſſes

$$\frac{m^{\frac{1}{2}}.\ \overline{1-h.} + 1,6.(1-h^{n+1})}{1,\ 6.\ p^n.\ h. \qquad (1-t^k).\ (1-h) : \overline{1-t.}}$$

gemacht, ſo erhält man $\frac{2,58}{1,354}$ das iſt nahe 2 : 1 für das Verhältniſs der Wahrſcheinlichkeit, daſs der Verluſt nicht über die gröſste Erwartung gehen werde, zu der Wahrſcheinlichkeit des Gegentheils.

Es

Es ſey im allgemeinen dieſs Verhältniſs a:b, ſo folgt daraus noch dieſer Satz.

*Die Wahrſcheinlichkeit, daſs entweder gewonnen oder verlohren, aber auch ſowohl der Gewinn als der Verluſt innerhalb den Grenzen des gröſsten Rifico ſtehen bleiben werde, iſt zu der Wahrſcheinlichkeit, daſs entweder mehr gewonnen oder mehr verlohren werde, wie* $a - b : 2b$.

Dieſs fällt von ſelbſt auf, wenn man erwäget, daſs unter den angenommenen Vorausſetzungen, die Coëfficienten des Binomii von dem erſten bis an den *n*ten *vor* dem Mittlern, die Fälle angeben, in denen der Gewinn über die gröſste Erwartung geht, und die Summe von dieſen iſt der Summe derer gleich, die auf den *n*ten an der andern Seite des mittlern Coëfficienten folgen. Die zwiſchen dieſen fallende *n vor* und *n nach* dem mittlern, nebſt dem mittlern ſelbſt, enthalten die Fälle, in denen Gewinn und Verluſt unter der gröſsten Erwartung bleibet, oder doch nicht über ſie hinaus gehet.

## 5.

Die nämliche Methode, die Wahrſcheinlichkeit der gröſsten Erwartung zu beſtimmen, findet auch Statt bey der Abweichung der gefundenen Mittelgröſsen in der vierten Abhandlung. Die *gröſste zu erwartende Abweichung* iſt immer nicht die gröſste, die *möglich* iſt; nur die gröſste *die zu erwarten* iſt. Alſo iſt auch

hier noch die Frage zurück: wie groſs die Wahrſcheinlichkeit dieſer Erwartung ſey, oder *die Wahrſcheinlichkeit, daſs die wirkliche Abweichung nicht weiter gehen werde, als jene gröſste in der Erwartung?*

Die gröſste zu erwartende Abweichung der mittlern Gröſse iſt (§. 1. der vierten *Abhandl.*) ausgedruckt durch $\frac{0,2.a}{N^{\frac{1}{2}}}$ wo $a = 1$, die Summe der gröſsten *möglichen* Abweichungen auf beyden Seiten iſt, und N die Zahl der Fälle, aus denen die mittlere oder Durchſchnitts-Gröſse gefunden iſt. Wenn nun $\frac{0,2.a}{N^{\frac{1}{2}}} \cdot N = 0,2.a.N^{\frac{1}{2}}$. für n, und N für *m* in den vorhergehenden Ausdrücken geſetzet wird, ſo kann hier auf eine ähnliche Art die Wahrſcheinlichkeit der zu erwartenden Abweichung, wie oben in Hinſicht des Riſico, beſtimmet werden.

So iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs die wirkliche Abweichung der Durchſchnitts-Gröſse, *ſie falle auf die eine oder die andere Seite der wahren*, innerhalb den Grenzen der gröſsten zu erwartenden bleiben werde, eben ſo zu beſtimmen, als vorher die Wahrſcheinlichkeit, daſs Gewinn oder Verluſt nicht über die gröſste Erwartung gehen werde.

## 6.

Hat man aus einer Zahl von Fällen N eine gröſste zu erwartende Abweichung der mittlern Gröſse beſtimmt,

Digitized by Google

ſtimmt, und es iſt nun die Frage, wie groſs die Wahrſcheinlichkeit ſey, daſs in einer gegebenen Anzahl von Fällen *m* ihre wirkliche Abweichung innerhalb den nämlichen Grenzen bleibe? ſo kann jene Abweichung $o, 2 : N^{\frac{1}{2}}$ durch einen Bruch ausgedruckt werden, wenn *a* das Ganze oder die Einheit iſt. Das Product aus dieſem Bruch in *m* giebt die Gröſse *n* in den obigen Formeln. Das übrige geſchieht dann wie vorher. Z. B. wenn man annimmt, daſs die mittlern Zahlen in den Sterblichkeits-Tafeln nur bis auf eine gewiſſe Grenze ſicher ſind, wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſolche bey einer beſondern Anzahl von Perſonen eben ſo genau zutreffen werden?

---

## Verbeſſerungen.

Seite 12 Zeile 11 leſe man 1, 348
— — — 29 — — 25,957
Seite 57 Zeile 20 für 0,959 ſetze man 0,659
— — — 24 — 0,626 — — 0,616
Seite 69 Zeile 1 von unten für $10^{x}$ ſetze man $9^{\frac{1}{x}}$
— 77 — 4 für $(n'+1)$ ſetze man $n(n'+1)$
— 88 — 1 — gröſste — — gröſſere
— — — 8 — $\lambda\overline{ab} - (\lambda\overline{ab}+\delta)$ — — $\lambda\overline{ab}.(\lambda\overline{ab}+\delta)$
— 119 — 20 für $(a+tx+\ldots+bx^n)^m$ ſetze man $(a+bx+\ldots+tx^n)^m$
— 131 — 2 für $(\alpha+\alpha y)^m$ ſetze man $(\alpha+\alpha y)^{tm}$
— 136 — 5 für $\frac{mn+1}{1}$ — — $\frac{mn+1}{2}$
— 175 Zeile 3 für, *p geſetzet*, ſchreibe man, *p, und* $N+o,16=q$ geſetzet

Seite

S. 175 Z. 4 für $p+p\left(1-\frac{Nm^2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$ ſetze man

$$p+p\left(1-\frac{Nm^2}{p^2q}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

— 184 Zeile 5 von unten, für 160 — 16

— 254 — 8 ſtatt 8,1967 ſoll ſtehen 8,1969

— 260 — 15 — $\frac{\overset{n}{B}}{B}\cdot\frac{A}{r^n}$ — $\frac{\overset{n}{B}}{B}\cdot\frac{1}{r^n}$

— 264 — 2 — *weniger als der dritte Theil*, ſoll ſtehen *wenig mehr als der dritte Theil*

— — — 7 ſtatt $\frac{1}{4}$ ſoll ſtehen $\frac{2}{7}$

— 275 — 14 — $n=5$ ſoll ſtehen $n=15$, $m=5$

— 277 — 6 — $\lambda\overline{(a+mb)\ (+m+n)}$ ſoll ſtehen $-\lambda\overline{(a+m)\,.\,(b+m+n)}$.

— 295 letzte Zeile ſtatt $t=h$ ſoll ſt. *t oder h.*

— 296 Zeile 6 ſoll ſtehen

$$\frac{q-2n}{q+2n+1}=\frac{\frac{1}{2}m-2m^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}m+2m^{\frac{1}{2}}+1},\quad =\frac{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}}-2}{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}}+2}.$$

## *Verbeſſerungen im erſten Theil.*

Seite 63 Zeile 15 für $d(q^x)$ ſoll ſtehen $d.(xq^x)$

Tab. I. Seite 537 neb. 25 Jahr unter 3 p. C. muſs ſteh. 2,09377

— — — — 30 — — 4 p. C. — — 3,24339

— Seite 538 — 52 — — 3 p. C. — — 58952

— — — — 61 Jahr unt. 4 p. C. m. ſt. 10,940412 5044

— — 539 — 84 — — 4 p. C. muſs ſteh. 47481

Tab. III. Seite 544 — 33 — — 3 p. C. — — 17753

— — — — 38 — — 3 p. C. — — 15872

Tab. VIII. S. 554 In dieſer Tafel müſſen die Alterszahlen von 1 anfangen, alſo für 0, 1, für 1, 2 u. ſ. f. ſtehen.

Tab. XVI. S. 570 neben 16 unter 5 p. C. muſs ſtehen 15,1457

Tab. XXV. S. 597 neben 75 muſs ſtehen 1,0540

Digitized by Google

Fig. 1.

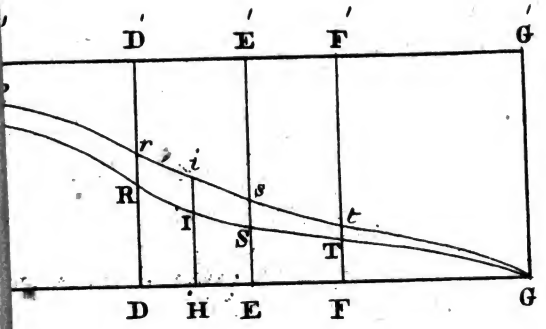


Fig. 2.

..3.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

X. 6/7559

Digitized by Google